Definition der Modellkonstruktion

Sei S Menge von Grundklauseln.

Definition 4.33. (Definition des Modellfunktors Φ)

Sei $C \equiv C' \vee s = t$ und sei das Regelsystem R_C der durch die $D \in S$ mit $C \succ_c D$ produzierten Regeln schon definiert. Die Klausel C **produziert** die Regel $s \to t$, falls (1) bis (5) gilt:

(1) C ist reduktiv für $s \to t$,
(2) C ist ein Gegenbeispiel für R_C^*,
(3) s ist irreduzibel in R_C,
(4) C' ist ein Gegenbeispiel für $(R_C \cup \{s \to t\})^*$ und
(5) kein Literal in C ist markiert.

Sei $R_S = \{s \to t \mid C \in S, C \text{ produziert } s \to t\}$.
Es ist $\Phi(S) = I_S = R_S^*$.

Eigenschaften des Modellfunktors (1)

Sei S gegeben und $R = R_S$.

Lemma 4.23

R und alle R_C sind konfluent und terminierend. Es gilt $R_C \subseteq R$.

Lemma 4.24

Sei $C \equiv C' \vee s = t$ reduktiv für $s \to t$.

a) Für alle $l \to r$ in $R - R_C$ gilt $l \succeq s$.
b) Für $s \succ u, v$ gilt $\quad R_C^* \models u = v \quad \mathrm{gdw} \quad R^* \models u = v$.
c) Aus $R_C^* \models C$ folgt $R^* \models C$.

Beweis:

a) Wird $l \to r$ aus $R - R_C$ durch $D \equiv D' \vee l = r$ produziert, so gilt $D \succeq_c C$. Dann gilt $l \succeq s$.
b) Ist $s \succ w$, so ist w in $R - R_C$ irreduzibel nach a).
Für $s \succ u, v$ gilt also $R_C^* \models u = v \quad \mathrm{gdw} \quad u \downarrow v$ in R_C
$\quad \mathrm{gdw} \quad u \downarrow v$ in $R \quad \mathrm{gdw} \quad R^* \models u = v$.
c) Sei $C \equiv \Gamma \Rightarrow \Delta$. Dann ist $s \succ u', v'$ für alle $u' = v'$ in Γ. Aus $R_C^* \models C$ folgt $R_C^* \not\models \Gamma$ oder $R_C^* \models u = v$ für ein $u = v$ in Δ.
Gilt $R_C^* \not\models \Gamma$, so gilt $R^* \not\models \Gamma$ nach b), also $R^* \models C$.
Gilt $R_C^* \models u = v$ für ein $u = v$ aus Δ, so gilt $u \downarrow v$ in R_C, also $u \downarrow v$ in R,
also $R^* \models C$.

Eigenschaften des Modellfunktors (2)

Sei $C \equiv C' \vee s = t$ reduktiv für $s \to t$,
$R_0 = R_C \cup \{s \to t\}$ und s irreduzibel in R_C.

Beachte

C' kann kein Literal der Form $\neg s = v$, wohl aber eines der Form $s = v$ enthalten. Hierfür wird die Bedingung (4) in Definition 4.33 benötigt: $R_0^* \not\models C'$.

Lemma 4.25

a) Aus $R^* \models s = t$ und $R^* \models C'$ folgt $R_0^* \models C'$.

b) Gilt $R_0^* \models C'$ und nicht $R^* \models C$, so gibt es ein $s = v$ in C' mit $R^* \models t = v$.

c) Produziert C die Regel $s \to t$, so gilt $R^* \not\models C'$.

Beweis zu Lemma 4.25

R_0 ist konfluent und terminierend.
Für $s \succ u, v$ gilt wie in Lemma 4.24 b)

$$R_0^* \models u = v \text{ gdw } R_C^* \models u = v \text{ gdw } R^* \models u = v \qquad (+)$$

a) Es gelte $R^* \models s = t$ und $R^* \models C'$.
Gilt $R^* \models u = v$ für ein $u = v$ in C' mit $s \succ u, v$, so gilt $R_0^* \models C'$ nach $(+)$. Sonst gibt es ein $s = v$ in C' mit $R^* \models s = v$. Dann gilt $R^* \models t = v$ wegen $R^* \models s = t$, also $R_0^* \models t = v$ wegen $s \succ t, v$ und $(+)$, also $R_0^* \models s = v$.
Hieraus folgt $R_0^* \models C'$.

b) Wegen $R_0^* \models C'$ und $R^* \not\models C$ und $(+)$ gibt es $s = v$ in C' mit $R_0^* \models s = v$ und $R^* \not\models s = v$.
Es gilt dann $R_0^* \models t = v$, also auch $R^* \models t = v$ wegen $s \succ t, v$ und $(+)$.

c) Produziert C die Regel $s \to t$, so gilt $R_0^* \not\models C'$ und $s \to t$ liegt in R. Aus a) folgt jetzt $R^* \not\models C'$.

Vollständigkeit für Grundklauseln

Satz 4.17.

Sei S eine Menge von Grundklauseln und $\Box \notin S$. Sei $I_S = R^*$.

Ist $C \in S$ das kleinste Gegenbeispiel für I_S, so gibt es eine $\mathcal{GS}$-Inferenz in S mit Hauptprämisse C und Konklusion D mit

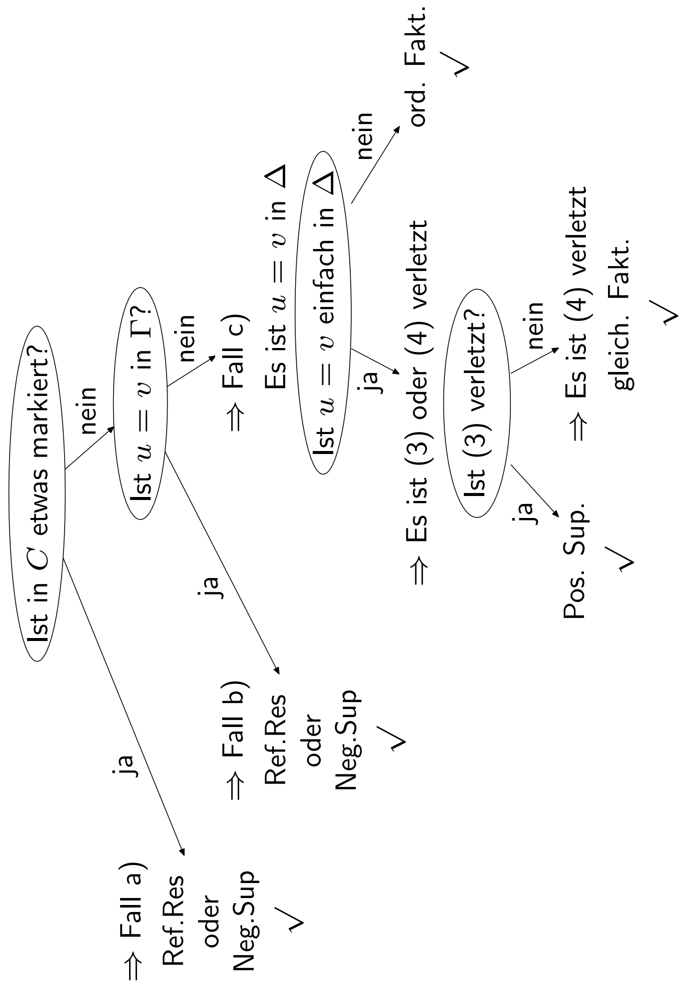
1. $C \succ_c D$ und D ist ein Gegenbeispiel für I_S.
2. Ist die Inferenz eine Superpositions-Inferenz, so ist die Nebenprämisse produktiv.

Also

$\mathcal{GS}$ hat die Verkleinerungseigenschaft für Gegenbeispiele.

Struktur des Beweises zu Satz 4.17

Sei $C \in S$ minimales Gegenbeispiel zu I_S, $C \equiv \Gamma \Rightarrow \Delta$ und $u = v$ das maximale Atom unter allen $l \in C$.



Beweis zu Satz 4.17 (1)

Sei $C \equiv \Gamma \Rightarrow \Delta$ und $u = v$ das Atom im größten Literal in C und $u \succeq v$.

Es gilt $R^* \not\models C$, also $R^* \models s = t$ für alle $s = t$ in Γ und $R^* \not\models s = t$ für alle $s = t$ in Δ.

a) Sei $\neg l = r$ aus C markiert und $l \succeq r$.

Gilt $l \equiv r$, so produziert „Ref.-Resolution" aus C ein D mit $C \succ_c D$ und $R^* \not\models D$.

Sei also $l \succ r$ und sei $C \equiv C' \vee \neg l = r$.

Wegen $l = r$ in Γ gilt $l \downarrow r$ in R, also ist l mit einer Regel $s \rightarrow t$ in R reduzierbar. Es werde $s \rightarrow t$ durch $C_1 \equiv C_0 \vee s = t$ produziert.

Wegen $l \equiv l[s]_p$ liefert „Neg. Superposition" aus C und C_1 die Klausel

$$D \equiv C' \vee C_0 \vee \neg l[t]_p = r.$$

Es gilt $R^* \not\models C'$ wegen $R^* \not\models C$.

Da C_1 $s \rightarrow t$ produziert, ist C_1 reduktiv für $s \rightarrow t$ und es gilt $R^* \models s = t$. Nach Lemma 4.25c) gilt $R^* \not\models C_0$.

$R^* \models l = r$ und $R^* \models s = t$ liefert $R^* \models l[t]_p = r$.

Also gilt $R^* \not\models D$. Es gilt $C \succ_c D$, da $\mathcal{GS}$ monoton ist.

Beweis zu Satz 4.17 (2)

b) Sei nichts in C markiert und $u = v$ in Γ.

Wie in a) mit $u = v$ statt $l = r$ liefert entweder „Ref.-Resolution" oder „Neg. Superposition" ein D mit $C \succ_c D$ und $R^* \not\models D$.

c) Sei nichts in C markiert und $u = v$ nicht in Γ.

Es ist $u = v$ in Δ, also $R^* \not\models u = v$, also $u \succ v$.

Tritt $u = v$ mehrfach in Δ auf, so liefert „Ord.-Faktorisierung" ein D mit $C \succ_c D$ und $R^* \not\models D$.

Es trete also $u = v$ nur einfach in Δ auf.

Dann ist $C \equiv C' \vee u = v$ reduktiv für $u \rightarrow v$.

Es ist $R^*_C \not\models C$ wegen $R^* \not\models C$ nach Lemma 4.24c).

Es ist C nicht produktiv wegen $R^* \not\models C$, also ist eine der Bedingungen (3) oder (4) aus Definition 4.33 verletzt.

Ist (3) verletzt, so ist u in R_C reduzibel. Dann liefert analog zu a) „Pos. Superposition" ein D mit $C \succ_c D$ und $R^* \not\models D$. (Beachte dazu $C \succ_c C_1$, also $u = v \succeq_l s = t$, und $R^* \models s = t$. Also gilt $u = v \succ_l s = t$ wegen $R^* \not\models C$.)

Sei (3) nicht verletzt, wohl aber (4), es gelte also $R^*_0 \models C'$ mit $R_0 = R_C \cup \{u \rightarrow v\}$. Es gilt nach Lemma 4.25b) $C \equiv C'' \vee u = t \vee u = v$ und $R^* \models v = t$.

„Gleich.-Faktorisierung" liefert $D \equiv C'' \vee \neg v = t \vee u = t$ und $C \succ_C D$. Es gilt $R^* \not\models C'' \vee u = t$ wegen $R^* \not\models C$. Es gilt $R^* \not\models \neg v = t$, wegen $R^* \models v = t$. Also gilt $R^* \not\models D$.

1. Beispiel

Ziel Demonstration von

a) der Verkleinerung von Gegenbeispielen.

b) der Bedeutung von (4) in Definition 4.33

Beachte

$s = t \vee C$ und $\neg s = t \vee D$ liefert in 2 $\mathcal{GS}$-Schritten unter den entsprechenden Ordnungsbedingungen $C \vee D$. Dies wird hier benutzt.

Sei $S = \{(1),(2),(3)\}$ und $a \succ b \succ c$.

S	1.Modell	2.Modell	3.Modell
$(1)\ b = c$	$1)\ b \to c$	$1)\ b \to c$	$1)\ b \to c$
$(2)\ a = b \vee a = c$	$2)\ -$	$3)\ \surd$	
$(3)\ \neg a = c$		$4)\ -$	
$(4)\ \neg b = c \vee a = c$		$2)\ a \to c$	
$(5)\ \neg b = c$			$2)\ -$
$(6)\ \square$			

Hier steht — für „die Modellkonstruktion erfüllt C nicht".
$\surd$ für „das bisher erzeugte Modell erfüllt schon C".

Also S ist unerfüllbar.

Beachte

Die Bedingung (4) aus Definition 4.33 verhindert, dass (2) produktiv ist. Daher ist (2) das kleinste Gegenbeispiel beim 1.Modell. Es kann nur mit einer Inferenzregel (mit (2) als Hauptprämisse) verkleinert werden: „Gleich.-Faktorisierung" liefert (4).

2. Beispiel

Sei $S = \{(1),(2),(3)\}$.
$\succ$ die LPO zu $p >_F q >_F \top$.
$s \neq t$ steht für $\neg s = t$.

Dann

Modellbildung + Saturierung liefern

S	1. Modell	2. Modell	3. Modell
$(1)\ p = \top \vee q = \top$	$1)\ p \to \top$	$2)\ \surd$	
$(2)\ p = \top \vee q \neq \top$	$2)\ \surd$	$3)\ p \to \top$	
$(3)\ p \neq \top$	$3)\ -$	$4)\ -$	
$(4)\ q = \top$		$1)\ q \to \top$	$1)\ q \to \top$
$(5)\ q \neq \top$			$2)\ -$
$(6)\ \square$			

Also

S ist unerfüllbar.

Hinweis

Vergleiche dies mit Satz 4.17. In jedem Inferenzschritt wird aus dem kleinsten Gegenbeispiel zum aktuellen Modell I_S ein noch kleineres Gegenbeispiel erzeugt.

Der Beweisprozeß für Grundklauseln

Problem

Eingabe: S, eine Menge von Grundklauseln.
Frage: Ist S H-erfüllbar?

Ansatz

Saturiere S bezüglich dem Kalkül $\mathcal{GS}$.

Nutze dabei den Redundanzbegriff.

Satz 4.18.

Sei $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine $\mathcal{GS}$-faire Ableitung mit $S_0 = S$.

Es gilt: S ist H-unerfüllbar $\mathrm{gdw}\ \Box \in S_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

$\mathcal{GS}$ hat nach Satz 4.17 die Verkleinerungseigenschaft für Gegenbeispiele.

Also gilt nach Satz 4.13 für jede $\mathcal{GS}$-faire Ableitung

$$\begin{aligned} S_0 \text{ ist H-unerfüllbar } & \mathrm{gdw}\ \Box \in S_\infty \\ & \mathrm{gdw}\ \Box \in S_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Satz 4.19.

$\mathcal{GS}$ ist korrekt und vollständig für Grundklauseln.

Superposition auf Klauseln

Ziel

Liften des Superpositionskalküls $\mathcal{GS}$ auf Grundklauseln zum Superpositionskalkül $\mathcal{S}$ auf Klauseln.

Sei S eine Menge von Klauseln.

Liften der Inferenzregeln

Ansatz: Die Ordnungsbedingungen in der Anwendungsbedingung einer Regel so anpassen, dass jede Grundinferenz, die in $\mathcal{GS}$ gezogen werden muss, in $\mathcal{S}$ abgedeckt ist. Beachte, dass $\succ$ auf den Termen mit Variablen nicht total ist.

Beispiel

Sei $s' \equiv \sigma(s), t' \equiv \sigma(t)$ und in $\mathcal{GS}$ die Bedingung $s' \succ t'$ vorhanden. Gilt $t \succeq s$, so gilt $s' \succ t'$ sicher nicht.

Übersetzt man $s' \succ t'$ in $\mathcal{GS}$ zu $t \not\succeq s$ in $\mathcal{S}$, so sind sicher alle σ mit $\sigma(s) \succ \sigma(t)$ durch $t \not\succeq s$ abgedeckt.

Bezeichnung

Das Literal l heißt (**strikt**) **maximal** in $C \vee l$, falls $l' \not\succ_l l$ (bzw. $l' \not\succeq_l l$) für alle l' aus C gilt.

Der Superpositionskalkül $\mathcal{S}$ (1)

Definition 4.34.

$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\succ}$ besteht aus folgenden Inferenzregeln.

Positive Superposition

$$\frac{C \vee s \doteq t \quad D \vee u \doteq v}{\sigma(C \vee D \vee u[t]_p = v)} \qquad \text{falls } \sigma = \text{mgu}(u/p, s) \text{ und (i)-(vi)}$$

Negative Superposition

$$\frac{C \vee s \doteq t \quad D \vee \neg u \doteq v}{\sigma(C \vee D \vee \neg u[t]_p = v)} \qquad \begin{array}{l}\text{falls } \sigma = \text{mgu}(u/p, s) \\ \text{und (i)-(iii), (iv'), (v)}\end{array}$$

Reflexiv-Resolution

$$\frac{D \vee \neg u = v}{\sigma(D)} \qquad \text{falls } \sigma = \text{mgu}(u, v) \text{ und (iv')}$$

Ordnungsfaktorisierung

$$\frac{C \vee u \doteq v \vee s = t}{\sigma(C \vee s = t)} \qquad \begin{array}{l}\text{falls } \sigma = \text{mgu}(u = v, s = t) \\ \text{und (iii')}\end{array}$$

Gleichheitsfaktorisierung

$$\frac{C \vee u \doteq v \vee s \doteq t}{\sigma(C \vee \neg v = t \vee u = t)} \qquad \begin{array}{l}\text{falls } \sigma = \text{mgu}(u, s) \\ \text{und (ii), (iii') und (vi)}\end{array}$$

Der Superpositionskalkül (2)

Definition der Nebenbedingungen

(i) $\sigma(t) \not\succeq \sigma(s)$.

(ii) $\sigma(v) \not\succeq \sigma(u)$.

(iii) $\sigma(s = t)$ ist strikt maximal in $\sigma(C \vee s = t)$ und C enthält kein markiertes Literal.

(iii') $\sigma(s = t)$ ist maximal in $\sigma(C \vee s = t)$ und C enthält kein markiertes Literal.

(iv) $\sigma(u = v)$ ist strikt maximal in $\sigma(D \vee u = v)$ und D enthält kein markiertes Literal.

(iv') $\neg u = v$ ist markiert oder in dieser Prämisse ist nichts markiert und $\sigma(\neg u = v)$ ist maximal in $\sigma(D \vee \neg u = v)$.

(v) $p \in \text{Pos}(u)$ und $u/p \notin V$.

(vi) $\sigma(s = t) \not\succeq_l \sigma(u = v)$.

Voraussetzungen wie stets:

Die Prämissen sind Variablen-disjunkt.

Beispiel

Sei S gegeben durch

(1) $p(u) = \text{true} \vee p(v) = \text{true} \vee f(u,v,z) = f(v,u,z)$
(2) $\neg p(x) = \text{true} \vee \neg p(y) = \text{true} \vee \neg g(x,y,z) = g(y,x,z)$
(3) $g(u,v,a) = g(v,u,a)$
(4) $\neg f(x,y,b) = f(y,x,b)$

Sei $\succ$ die LPO mit Präzedenz $f >_F g >_F p >_F a >_F b >_F$ true.

Dies liefert

(5)	$p(u) = \text{true} \vee p(v) = \text{true}$ $\vee \neg f(v,u,b) = f(v,u,b)$	Neg.Sup. (1), (4)
(6)	$\neg p(x) = \text{true} \vee \neg p(y) = \text{true}$ $\vee \neg g(x,y,a) = g(x,y,a)$	Neg.Sup. (3), (2)
(7)	$p(u) = \text{true} \vee p(v) = \text{true}$	Ref.Res. (5)
(8)	$\neg p(x) = \text{true} \vee \neg p(y) = \text{true}$	Ref.Res. (6)
(9)	$p(u) = \text{true}$	Ord.Fak. (7)
(10)	$\neg p(x) = \text{true} \vee \underline{\neg \text{true} = \text{true}}$	Neg.Sup. (9), (8)
(11)	$\neg p(x) = \text{true}$	Ref.Res. (10)
(12)	$\neg \text{true} = \text{true}$	Neg.Sup. (9), (11)
(13)	$\square$	Ref.Res. (12)

Beachte

Ohne die Regel Ordnungsfaktorisierung ist $\square$ aus S nicht herleitbar.

Korrektheit und Monotonie von $\mathcal{S}$

Bemerkung

Eine Grundinstanz $\sigma(\pi)$ einer $\mathcal{S}$-Inferenz π muss keine $\mathcal{GS}$-Inferenz sein, da die Ordnungsbedingung verletzt sein kann. Wir zeigen, dass $\sigma(\pi)$ korrekt ist, also gezogen werden darf. Ist $\sigma(\pi)$ eine $\mathcal{GS}$-Inferenz, so muss $\sigma(\pi)$ gezogen werden.

π ist **monoton**, falls jede $\mathcal{GS}$-Inferenz $\sigma(\pi)$ monoton ist.

Lemma 4.26

$\mathcal{S}$ ist korrekt und monoton: Für jede Inferenz

$$\pi \equiv \frac{C_1 \dots C_n C}{D \equiv \tau(D_0)} \qquad \text{gilt } \{C_1, \dots, C_n, C\} \models D.$$

Ist $\sigma(\pi)$ eine $\mathcal{GS}$-Inferenz, so gilt $\sigma(\tau(C)) \succ_c \sigma(\tau(C_i))$ und $\sigma(\tau(C)) \succ_c \sigma(\tau(D_0))$.

Beweis

Der Beweis läuft analog zum Beweis zu Lemma 4.22: Jede Grundinstanz $\sigma(\pi)$ ist korrekt: $\{\sigma(\tau(C_1)), \dots, \sigma(\tau(C_n)), \sigma(\tau(C))\} \models \sigma(\tau(D_0))$. Ist $\sigma(\pi)$ eine $\mathcal{GS}$-Inferenz, so ist $\sigma(\pi)$ monoton.

Nicht liftbare $\mathcal{S}$-Inferenzen

Erinnerung

Seien $C'_1, \ldots, C'_n, C' \in \mathsf{gnd}(S)$ und $\pi' \equiv \dfrac{C'_1, \ldots, C'_n C'}{D'}$ eine $\mathcal{GS}$-Inferenz.

π' ist liftbar, falls es $C_1, \ldots, C_n, C \in S$ mit $C'_i \in \mathsf{gnd}(C_i)$, $C' \in \mathsf{gnd}(C)$ und eine $\mathcal{S}$-Inferenz $\pi = \dfrac{C_1 \ldots C_n C}{D}$ gibt mit $D' \in \mathsf{gnd}(D)$.

Beachte

1. Im Resolutionskalkül $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}_\succ$ ist jede Grundinferenz liftbar.
2. In $\mathcal{H}$ und $\mathcal{S}$ ist nicht jede Grundinferenz liftbar:
   Es bestehe S aus den beiden Unit-Klauseln $f(x, x) = x$ und $a = b$. Sei $a \succ b$.
   Folgende Inferenz ist nicht liftbar
   $$\frac{a = b \quad f(a, a) = a}{f(a, b) = a}$$
3. a) Die Grundinferenz aus 2. ist redundant in $\mathsf{gnd}(S)$:
   Es gilt $f(b, b) = b \in \mathsf{gnd}(S)$ und $\{a = b, f(b, b) = b\} \models f(a, b) = a$ und $f(a, a) = a \succ_c f(b, b) = b, a = b$.
   b) Die Konklusion $f(a, b) = a$ entsteht durch eine Variablenüberlappung von $a = b$ in $f(x, x) = x$.

$\mathcal{S}$ ist liftend (1)

Lemma 4.27

Jede nicht-redundante $\mathcal{GS}$-Inferenz in $\mathsf{gnd}(S)$ ist liftbar zu einer $\mathcal{S}$-Inferenz in S mit nicht-redundanten Prämissen.

Beweis-Skizze:
Der problematische Fall einer $\mathcal{GS}$-Inferenz ist die Superpositions-Inferenz. Wir betrachten hier als typischen Spezialfall die positive Superposition. Sei π' nicht-redundant und von der Form

$$\pi' \equiv \frac{C'_0 \equiv C' \vee s' = t' \quad D'_0 \equiv D' \vee u' = v'}{C' \vee D' \vee u'[t']_p = v'} \quad s' \equiv u'/p,$$

Da π' nicht-redundant ist, sind C'_0 und D'_0 nicht-redundante Grundklauseln. Nach Lemma 4.18b) gibt es nicht-redundante Klauseln $C_0 \equiv C \vee s = t$ und $D_0 \equiv D \vee u = v$ mit $C'_0 \in \mathsf{gnd}(C_0)$ und $D'_0 \in \mathsf{gnd}(D_0)$. Seien o.B.d.A C_0 und D_0 Variablen-disjunkt. Dann gibt es eine Substitution σ mit $C'_0 \equiv \sigma(C_0)$, $D'_0 \equiv \sigma(D_0)$, $\sigma(s) \equiv s'$ und $\sigma(u) \equiv u'$, also $\sigma(u)/p \equiv \sigma(s)$.

$\mathcal{S}$ ist liftend (2)

a) Sei $p \in \mathsf{Pos}(u)$ und u/p keine Variable.
Dann existiert $\mu = \mathsf{mgu}(u/p, s)$. Sei π die Inferenz

$$\pi \equiv \quad \frac{C \vee s = t \quad D \vee u = v}{\mu(C \vee D \vee u[t]_p = v)}$$

Die Ordnungsbedingungen zu π' garantieren, dass die Ordnungsbedingungen zu π erfüllt sind. Dann ist π eine $\mathcal{S}$-Inferenz mit nicht-redundanten Prämissen und π' ist zu π liftbar.

b) Sei $p \notin \mathsf{Pos}(u)$ oder $p \in \mathsf{Pos}(u)$ und u/p eine Variable. Wir zeigen, dass dieser Fall nicht auftreten kann, da π' redundant ist:
Sei $\sigma(x)/p \equiv s'$ und sei τ gegeben durch $\tau(x) \equiv \sigma(x)[t']_p$ und $\tau(y) \equiv \sigma(y)$ sonst.
Dann gilt $\sigma(w) \succeq \tau(w)$ und $s' = t' \models \sigma(w) = \tau(w)$ für jeden Term w und daher $\{C' \vee s' = t', \tau(D \vee u = v)\} \models C' \vee D' \vee u'[t']_p = v'$.
Außerdem gilt $\sigma(x) \succ \tau(x)$, also $\sigma(u) \succ \tau(u)$ und somit $D' \vee u' = v' \succ \tau(D \vee u = v)$. Da $D' \vee u' = v'$ die Hauptprämisse ist, gilt außerdem $D' \vee u' = v' \succ C' \vee s' = t'$.
In diesem Fall ist also die Inferenz π' redundant in $\mathsf{gnd}(S)$.

Hauptergebnis zu $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\succ}$

Sei

S eine Menge von Klauseln.

Lemma 4.28

Sei $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine $\mathcal{S}$-faire $\mathcal{S}$-Ableitung. Dann ist S_∞ $\mathcal{S}$-saturiert bis auf Redundanz.

Beweis: Dies folgt aus Lemma 4.21.

Satz 4.20.

$\mathcal{S}$ ist korrekt und vollständig für Klauseln:

a) Es gilt $S \overset{*}{\underset{\mathcal{S}}{\vdash}} \Box \text{ gdw } S$ ist H-unerfüllbar.

b) Für jede $\mathcal{S}$-faire $\mathcal{S}$-Ableitung $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $S_0 = S$ gilt:
S ist H-unerfüllbar $\text{gdw } \Box \in S_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

a) folgt aus b).

b) folgt aus Satz 4.16.