Lifting: Fairness von $\mathcal{K}$-Ableitungen

Definition 4.30.

Eine $\mathcal{K}$-Ableitung $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ auf Klauseln heißt **fair**, falls $\mathcal{K}(S_\infty - R(S_\infty)) \subseteq \mathcal{K}_R(S^\infty)$ gilt.

Lemma 4.21

Eine $\mathcal{K}$-Ableitung $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist fair, falls $\mathcal{K}$ monoton ist und $\text{con}(\mathcal{K}(S_\infty - R(S_\infty)) - \mathcal{K}_R(S_\infty - R(S_\infty))) \subseteq S^\infty \cup R(S^\infty)$ gilt.

Ist $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine faire $\mathcal{K}$-Ableitung, so ist S_∞ $\mathcal{K}$-saturiert bis auf Redundanz.

Beweis: Übung.

Satz 4.16.

$\mathcal{K}$ sei monoton, korrekt und liftend, $\mathcal{K}$ habe die Verkleinerungseigenschaft für Gegenbeispiele und $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sei eine faire $\mathcal{K}$-Ableitung auf Klauseln. Dann gilt: S_0 ist H-unerfüllbar gdw $\Box \in S_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

S_∞ ist $\mathcal{K}$-saturiert bis auf Redundanz.

Also gilt S_0 ist H-unerfüllbar gdw $\Box \in S_\infty$ gdw $\Box \in S_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel $\mathcal{K} = \mathcal{R}_\succ$

Sei $\mathcal{K} = \mathcal{R}_\succ$ der Resolutionskalkül aus Abschnitt 4.1,
Φ der Modellfunktor aus Abschnitt 4.1.

Beachte

Nach dem hier entwickelten Ansatz gilt:

Definition 4.6 definiert $\mathcal{GR}_\succ$ auf den Grundklauseln.
Definition 4.8 erweitert $\mathcal{GR}_\succ$ zu $\mathcal{R}_\succ$ auf den Klauseln.

Es gilt

a) In jeder Grundinferenz ist die Hauptprämisse (die rechte Prämisse) größer als die Nebenprämisse.
b) $\mathcal{R}_\succ$ ist monoton und korrekt.
c) $\mathcal{R}_\succ$ verkleinert Gegenbeispiele in jeder Menge S.
d) Jede $\mathcal{R}_\succ$-Grundinferenz ist liftbar. Nicht-liftbare Inferenzen treten nicht auf, da die Gleichheit nicht zugelassen ist.

Also erfüllt $\mathcal{R}_\succ$ die Voraussetzungen von Satz 4.16.

Beispiel $\mathcal{K} = \mathcal{H}_{\succ}$

Sei $\mathcal{K} = \mathcal{H}_{\succ}$ der Superpositionskalkül für Horn-Klauseln,
Φ der Modellfunktor aus Abschnitt 4.2.

Es gilt

a) In jeder Grundinferenz π ist die Hauptprämisse größer als die Nebenprämisse. $\mathcal{H}_{\succ}$ ist eine Erweiterung von $\mathcal{GH}_{\succ}$.
b) $\mathcal{H}_{\succ}$ ist monoton und korrekt.
c) $\mathcal{H}_{\succ}$ verkleinert Gegenbeispiele in jeder Menge S von Grundklauseln.
d) Jede nicht-redundante $\mathcal{H}_{\succ}$-Grundinferenz ist liftbar. Es gibt aber nicht-liftbare Grundinferenzen.

Also erfüllt $\mathcal{H}_{\succ}$ die Voraussetzungen von Satz 4.16.

4.4 Superposition für beliebige Klauseln

Sei

S eine Menge beliebiger Klauseln.

$\succ$ eine Reduktionsordnung, die total ist auf den Grundtermen.

$\succ_c$ die durch $\succ$ bestimmte Ordnung auf Klauseln wie stets.

Markierung (Selektion)

In jeder Klausel darf man beliebig maximal ein negatives Literal markieren.

Ziel

Angabe des Superpositionskalküls $\mathcal{S}$, der korrekt und vollständig ist.

Dabei Ausnutzung der Ergebnisse aus dem letzten Abschnitt.

Erinnerung an Ordnungen

Sei

$\succ$ eine Noethersche Ordnung auf Literalen, mit

1. Die Einschränkung auf die Grundliterale ist total.
2. Die Einschränkung auf die Terme ist eine Grundreduktionsordnung.

Die Komplexität von Literalen ist die Multimenge

$$\text{comp}(l) = \begin{cases} \{s, t\} & \text{falls } l \text{ ist } s = t \\ \{s, s, t, t\} & \text{falls } l \text{ ist } \neg s = t \end{cases}$$

Sei $l \succ_l l'$ gdw $\text{comp}(l) \succ\!\!\succ \text{comp}(l')$.

Die Komplexität einer Klausel C ist die Multimenge

$$\text{comp}(C) = \{\text{comp}(l) \mid l \text{ in } C\}$$

Sei $C \succ_c D$ gdw $\text{comp}(C) \succ\!\!\succ_l \text{comp}(D)$.

Beachte

Dies ist für Horn-Klauseln wie früher.
Aus $s \succ t$ und $s = t \succ_l \neg u = v$ folgt $s \succ u, v$.

Superposition auf Grundklauseln

Sei S eine Menge von Grundklauseln.

Intention

Der Superpositionskalkül lässt nur Inferenzen zwischen maximalen Literalen in Klauseln zu:

a) Superposition positiv (bzw. negativ):
Überlappung einer maximalen Gleichung in eine maximale (negierte) Gleichung.

b) Reflexiv-Resolution:
Resolution einer maximalen negierten Gleichung mit $x = x$.

c) Es gibt zwei Faktorisierungsregeln:
Sie arbeiten mit maximalen Literalen.

Weitere Einschränkung der Redundanz:

Man kann mit Markierungen von negativen Literalen (Selektion) arbeiten. In den Beispielen sind die markierten Literale unterstrichen.

Bezeichnung

Das Literal l heißt (**strikt**) **maximal** in $C \vee l$, falls $l \succeq_l l'$ (bzw. $l \succ_l l'$) für alle l' aus C gilt.

Der Superpositionskalkül $\mathcal{GS}$ (1)

Sei S Menge von Grundklauseln.

Definition 4.31.

$\mathcal{GS} = \mathcal{GS}_{\succ}$ besteht aus folgenden Inferenzregeln.

Positive Superposition

$$\frac{C \vee s \doteq t \quad D \vee u \doteq v}{C \vee D \vee u[t]_p = v} \qquad \text{falls } u/p \equiv s \text{ und (i)-(vi)}$$

Negative Superposition

$$\frac{C \vee s \doteq t \quad D \vee \neg u \doteq v}{C \vee D \vee \neg u[t]_p = v} \qquad \begin{array}{l}\text{falls } u/p \equiv s \\ \text{und (i)-(iii), (iv'), (v)}\end{array}$$

Reflexiv-Resolution

$$\frac{D \vee \neg u = v}{D} \qquad \text{falls } u \equiv v \text{ und (iv')}$$

Ordnungsfaktorisierung

$$\frac{C \vee u = v \vee s = t}{C \vee s = t} \qquad \begin{array}{l}\text{falls } \{s, t\} = \{u, v\} \\ \text{und (iii')}\end{array}$$

Gleichheitsfaktorisierung

$$\frac{C \vee u \doteq v \vee s \doteq t}{C \vee \neg v = t \vee u = t} \qquad \begin{array}{l}\text{falls } u \equiv s \\ \text{und (ii), (iii') und (vi)}\end{array}$$

Der Superpositionskalkül $\mathcal{GS}$ (2)

Definition der Nebenbedingungen

(i) $s \succ t$.

(ii) $u \succ v$.

(iii) $s = t$ ist strikt maximal in $C \vee s = t$ und C enthält kein markiertes Literal.

(iii') $s = t$ ist maximal in $C \vee s = t$ und C enthält kein markiertes Literal.

(iv) $u = v$ ist strikt maximal in $D \vee u = v$ und D enthält kein markiertes Literal.

(iv') $\neg u = v$ ist markiert oder in dieser Prämisse ist nichts markiert und $\neg u = v$ ist maximal in $D \vee \neg u = v$.

(v) $p \in \text{Pos}(u)$.

(vi) $u = v \succ_l s = t$.

Beispiele zu $\mathcal{GS}$

Beispiel 1 Nachbildung der Resolution

(1)	$s = t \vee C$	(3)	$\underline{\neg t = t} \vee C \vee D$
(2)	$\neg s = t \vee D$	(4)	$C \vee D$

Ist s der größte Term, so folgen (3) und (4) aus (1) und (2) in $\mathcal{GS}$. Wir lassen den Zwischenschritt (3) im Folgenden weg.

Beispiel 2

Sei $\succ$ die LPO zu $p >_F a >_F b$ und $S = \{(1), (2), (3)\}$.

Wir zeigen $S \overset{*}{\vdash} \square$.

(1)	$\neg p(a) = \top \vee \neg p(b) = \top$	(4)	$\neg p(b) = \top$
(2)	$\neg p(a) = \top \vee p(b) = \top$	(5)	$p(b) = \top$
(3)	$p(a) = \top$	(6)	$\square$

Beispiel 3 Bedeutung der Gleichheitsfaktorisierung

Sei $\succ$ die LPO zu $a >_F b >_F c$ und $S = \{(1), (2), (3)\}$.

(1)	$a = b \vee a = c$	(4)	$\underline{\neg b = c} \vee a = c$
(2)	$b = c$	(5)	$a = c$
(3)	$\neg a = c \vee \neg a = c$	(6)	$\neg a = c$
		(7)	$\square$

Negative Superposition von (1) auf (3) liefert eine Tautologie. Sie liefert kein neues Wissen. Sonst ist auf S nur die Gleichheitsfaktorisierung anwendbar. Sie liefert (4) aus (1). Die restlichen Klauseln entstehen durch Resolution.

Korrektheit und Monotonie von $\mathcal{GS}$

Lemma 4.22

$\mathcal{GS}$ ist korrekt und monoton: Für jede Inferenz $\dfrac{C_1 \ldots C_n C}{D}$ gilt $\{C_1, \ldots C_n, C\} \models D$ und $C \succ_c D$ und $C \succ_c C_i$.

Beweis:

Wir zeigen dies beispielhaft für die positive Superposition

$$\frac{C \vee s = t \quad D \vee u = v}{D' :\equiv C \vee D \vee u[t]_p = v}$$

Es ist $s \succ t$ nach (i). Wegen (v) folgt daraus $u \succ u[t]_p$ und somit $u = v \succ_l u[t]_p = v$. Aus (vi) und (iii) folgt $u = v \succ_l l$ für alle l in $C \vee s = t$. Daher gilt $D \vee u = v \succ_c C \vee s = t$ und $D \vee u = v \succ_c D'$.

Sei I ein H-Modell mit $I \models C \vee s = t$ und $I \models D \vee u = v$. Gilt $I \models l_1$ oder $I \models l_2$ für ein $l_1 \in C$ bzw. $l_2 \in D$, so gilt $I \models D'$. Gilt $I \models l$ für kein $l \in C \vee D$, so gilt $I \models u = v \wedge s = t$. Dann gilt $I \models u[t]_p = v$, also auch $I \models D'$.

Analog zeigt man, dass auch die anderen Inferenzregeln korrekt und monoton sind.

Zur Vollständigkeit von $\mathcal{GS}$

Ziel

Vollständigkeitsergebnis aus letztem Abschnitt anwenden.

Ansatz

a) Angabe eines Modell-Funktors I.
   Sei S eine Menge von **Grundklauseln** mit $\square \notin S$. Beschreibung des Modells I_S durch ein konvergentes Grundregelsystem.
b) Nachweis, dass $\mathcal{GS}$ hinreichend mächtig ist, also dass $\mathcal{GS}$ die Verkleinerungseigenschaft für Gegenbeispiele hat.

Dann

Abschnitt 4.3 liefert, dass $\mathcal{GS}$ vollständig ist für Grundklauselmengen.

Idee der Modellkonstruktion

Sei S Menge von Grundklauseln.

Definition 4.32.

Eine Grundklausel $C \vee s = t$ heißt **reduktiv** für $s \longrightarrow t$, falls $s = t$ strikt maximal in der Klausel ist und $s \succ t$ gilt.

Bemerkung zur Konstruktion von $I_S = R_S^*$

R_S ist eine Menge von Regeln $s \longrightarrow t$ mit $C \equiv C' \vee s = t$ in S.

R_S wird induktiv nach $\succ_c$ definiert.

R_S ist konvergent. Nicht jedes C produziert eine Regel.

Idee der Modellkonstruktion

Sei $C \equiv C' \vee s = t$ in S und reduktiv für $s = t$ und noch nicht $I_S \models C$. Es ist $C \succ_c C'$.

Sei $\tilde{C}$ die Konjunktion der negierten Literale in C'.

Dann entspricht C der positiv/negativ bedingten Regel $s \longrightarrow t$ if $\tilde{C}$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist schon definiert, ob I_S die Bedingung $\tilde{C}$ erfüllt oder nicht.

Es wird $s \longrightarrow t$ in R_S aufgenommen, falls I_S die Bedingung $\tilde{C}$ erfüllt.