Ergebnis zum Paramodulationskalkül

Bezeichnung

S heißt **funktional-reflexiv**, falls S für jedes $f \in F$ mit $\alpha(f) = n$ die Gleichung $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$ enthält.

Satz 4.7. (Robinson, Wos)

Sei S funktional-reflexiv und abgeschlossen unter den Inferenzregeln des Paramodulationskalküls. Dann gilt:
S ist nicht H-erfüllbar gdw $\Box \in S$.

ohne Beweis. Dieses Ergebnis wird später wesentlich verschärft.

Also

Mit der Bezeichnung von oben gilt für jedes funktional-reflexive S

$S \overset{*}{\underset{\mathcal{P}}{\vdash}} \Box$ gdw S ist nicht H-erfüllbar.

Literatur-Hinweis

G. Robinson, L.T. Wos: Paramodulation and theorem proving in first order theories with equality. In: B. Meltzer, D. Michie (eds): Machine Intelligence 4, American Elsevier (1969) 133-150.

Beispiel 1 zur Paramodulation

Sei

$S = \{(1), (2)\}$

(1) $f(x) = g(a)$

(2) $\neg f(b) = g(y)$

Anwendung der Regeln liefert

(3) $\neg g(a) = g(y)$ Paramodulation mit (1), (2)

(4) $\Box$ Ref. Resolution mit (3)

Also ist S nicht H-erfüllbar.

Beachte

Hier werden die funktional-reflexiven Axiome $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$ nicht benötigt.

Beispiel 2 zur Paramodulation

Schreibweise hier: $p(x,y)$ statt $p(x,y) = \top$.

Zu zeigen (*) $\mathcal{A}x \models p(a,d)$ mit

$\mathcal{A}x : \forall x,y,z : (p(x,y) \wedge p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$
$\quad p(a,b) \wedge p(b,c) \wedge p(c,d)$

Skolemisierung liefert $S = \{(1), \ldots, (5)\}$

(1) $\neg p(x,y) = \top \vee \neg p(y,z) = \top \vee p(x,z) = \top$
(2) $p(a,b) = \top$
(3) $p(b,c) = \top$
(4) $p(c,d) = \top$
(5) $\neg p(a,d) = \top$

Anwendung der Regel Paramodulation auf (1), (2) mit

C: $\Box$
$s = t$: $p(a,b) = \top$
D: $\neg p(x,y) = \top \vee \neg p(y,z) = \top \vee p(x,z) = \top$

liefert $\sigma = \{x \leftarrow a, y \leftarrow b\}$, also die neue Klausel

(6) $\neg\top = \top \vee \neg p(b,z) = \top \vee p(a,z) = \top$

Beispiel 2 zur Paramodulation (Forts.)

Die Regeln liefern

(6)	$\neg\top = \top \vee \neg p(b,z) = \top \vee p(a,z) = \top$	Paramod. (2), (1)
(7)	$\neg p(b,z) = \top \vee p(a,z) = \top$	Ref. Resolution (6)
(8)	$\neg\top = \top \vee p(a,c) = \top$	Paramod. (3), (7)
(9)	$p(a,c) = \top$	Ref. Resolution (8)
(10)	$\neg\top = \top \vee \neg p(c,z) = \top \vee p(a,z) = \top$	Paramod. (9), (1)
(11)	$\neg p(c,z) = \top \vee p(a,z) = \top$	Ref. Resolution (10)
(12)	$\neg\top = \top \vee p(a,d) = \top$	Paramod. (4), (11)
(13)	$p(a,d) = \top$	Ref. Resolution (12)
(14)	$\neg\top = \top$	Paramod. (13), (5)
(15)	$\Box$	Ref. Resolution (14)

Also

S ist H-unerfüllbar.
(*) gilt.

Bemerkungen

1. Bemerkung

Die Paramodulationsregel ist sehr oft anwendbar. Dies führt zu sehr großem Suchraum bei der Suche nach einer Ableitung $S \overset{*}{\underset{\mathcal{P}}{\vdash}} \Box$.

Ziel: Suchraum einschränken.

2. Bemerkung

Es gibt schon lange Beschränkungen des Suchraums, die die Vollständigkeit erhalten.

Beispiele: Hyperresolution, Selektion negativer Literale, set-of-support-Strategie.

3. Bemerkung

Ziel: Beschränkung der Inferenzregeln durch Ordnungsbedingungen.

Beachte

Dies führt im Fall der positiven Unitklauseln (reines Gleichheitsbeweisen) zu Rewrite-Schritten und der Bildung kritischer Paare. Negative Unitklauseln werden wie verallgemeinerte Narrowingsregeln behandelt.

Saturierung

Bezeichnung

Ein Kalkül heißt **Saturierungskalkül**, wenn er die gegebene Formelmenge mit den Inferenzregeln immer weiter anreichert. Diese Saturierung kann, muss aber nicht halten. Sie wird abgebrochen, wenn die leere Klausel $\Box$ hergeleitet ist oder keine neue Klausel mehr erzeugt werden kann.

Beachte

a) Es gibt auch **zerlegende Beweisverfahren**, die die Formeln zerlegen bis die Frage der Erfüllbarkeit geklärt ist. Beispiel: Das Tableau-Verfahren.
b) Wir betrachten hier nur saturierende Verfahren.

4.2 Superposition für Horn-Klauseln

Voraussetzung für Abschnitt 4.2

$=$ ist das einzige Prädikatssymbol.

S ist eine Menge von Horn-Klauseln. Also hat jede Klausel $\Gamma \Rightarrow \Delta$ die Form $\Gamma \Rightarrow l = r$ oder $\Gamma \Rightarrow$

$\succ$ ist eine totale Reduktionsordnung auf den Grundtermen Term(F).

$\succeq = (\succ \cup =)$ ist der reflexive Abschluß von $\succ$.

Beachte

Seien $s, t \in$ Term(F), $s >_{TT} t$. Dann gilt auch $s \succ t$. (Übung!)

Also enthält $\succ$ (auf Term(F)) die Teiltermrelation.

Häufige Wahl von $\succ$: Eine KBO oder LPO mit totaler Präzedenz.

Definition 4.12.

Sei $\Gamma \Rightarrow l = r$ eine Grund-Horn-Klausel.

a) l ist **strikt maximal** in $\Gamma \Rightarrow l = r$ (Schreibweise $l \succ r, \Gamma$), falls $l \succ t$ für alle $t \in \Gamma \cup \{r\}$.
b) l ist **maximal** in $\Gamma \Rightarrow l = r$ (Schreibweise $l \succeq r, \Gamma$), falls $l \succeq t$ für alle $t \in \Gamma \cup \{r\}$.

Das System $\mathcal{GH}$ für Grund-Horn-Klauseln

Definition 4.13.

Das Inferenzsystem $\mathcal{GH} = \mathcal{GH}_{\succ}$ besteht aus folgenden Regeln:

Superposition rechts

$$\frac{\Gamma' \Rightarrow l \doteq r \qquad \Gamma \Rightarrow s \doteq t}{\Gamma', \Gamma \Rightarrow s[r]_\pi = t} \qquad \text{falls } s/\pi \equiv l,\ \ l \succ r, \Gamma' \text{ und } s \succ t, \Gamma$$

Superposition links

$$\frac{\Gamma' \Rightarrow l \doteq r \qquad \Gamma, s \doteq t \Rightarrow \Delta}{\Gamma', \Gamma, s[r]_\pi = t \Rightarrow \Delta} \qquad \text{falls } s/\pi \equiv l,\ \ s \succ t,\ l \succ r, \Gamma' \text{ und } s \succeq \Gamma, \Delta$$

Reflexiv-Resolution

$$\frac{\Gamma, s = s \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \text{falls } s \succeq \Gamma, \Delta$$

Also: Einschränkung der Regeln des Paramodulationskalküls:

Die Paramodulation wird eingeschränkt auf die jeweils (strikt) maximalen Terme in der Klausel. Dies gilt auch für die Reflexiv-Resolution.

Beachte

Hier treten nur Grundterme auf, also ist der Test auf Unifizierbarkeit identisch mit dem Test auf Identität.

Beispiel 1 für $\mathcal{GH}$

Sei S gegeben durch

(1) $a = b \Rightarrow c = d$

(2) $a = c \Rightarrow b = d$

(3) $c = d \Rightarrow$

und $\succ$ die LPO zur Präzedenz $a \rhd b \rhd c \rhd d$.

a) Im Kalkül $\mathcal{GH}$ ist keine Inferenzregel anwendbar, die Saturierung stoppt sofort. S ist H-erfüllbar, z. B. durch $I_1 = \emptyset$ und $I_2 = \{b = d\}$.

b) Im Paramodulationskalkül $\mathcal{P}$ sind zwischen (1) und (2) z. B. folgende Paramodulationsschritte möglich.
(4) $a = b, a = \underline{d} \Rightarrow b = d$
(5) $a = b, a = c \Rightarrow b = \underline{c}$

Hier ist jeweils $C \vee s = t$ die Klausel (1) und D die Klausel (2).
Der neu entstandene Term ist unterstrichen.
S erlaubt noch weitere Paramodulationsschritte.

Beispiel 2 für $\mathcal{GH}$

Sei $\succ$ die LPO zur Präzedenz $a \rhd b \rhd c \rhd d$ und $S = \{(1), \ldots, (4)\}$

(1) $\Rightarrow a = b$

(2) $a = b \Rightarrow a = c$

(3) $b = c \Rightarrow c = d$

(4) $b = d \Rightarrow$

Dann liefert die Saturierung mit $\mathcal{GH}$

(5)	$b = b \Rightarrow a = c$	Superposition links mit (1), (2)
(6)	$b = b \Rightarrow b = c$	Superposition rechts mit (1), (5)
(7)	$\Rightarrow b = c$	Reflexiv-Resolution mit (6)
(8)	$c = c \Rightarrow c = d$	Superposition links mit (7), (3)
(9)	$\Rightarrow c = d$	Reflexiv-Resolution mit (8)
(10)	$c = d \Rightarrow$	Superposition links mit (7), (4)
(11)	$d = d \Rightarrow$	Superposition links mit (9), (10)
(12)	$\square$	Reflexiv-Resolution mit (11)

Übung (1), (2), (3) $\models b = d$.
Also ist S nicht H-erfüllbar.

Modellgenerierung: Die Idee

Ziel

Regelsystem R zu S konstruieren mit

a) R ist konvergent.

b) Ist S saturiert und $\square \notin S$, so ist die R-Gleichheit $=_R$ ein Modell für S, d. h. $=_R \models C$ für alle C in S.
(Beachte, dass $I = =_R$ ein H-Modell zu R ist.)

Konstruktion von R aus S

Induktion nach der Ordnung $\succ_c$ auf Klauseln.

Definition 4.14. (Die Ordnung $\succ_c$ auf Klauseln)

Sei C die Klausel $\Gamma \Rightarrow \Delta$ und $s = t$ eine Gleichung in $\Gamma \cup \Delta$. Sei $\succ_0 = \succ\!\succ$ und $\succ_1 = \succ\!\succ_0$. Setze

$$\text{comp}(C, s = t) = \begin{cases} \{s, t\} & s = t \text{ in } \Delta \\ \{s, s, t, t\} & s = t \text{ in } \Gamma \end{cases}$$

$\text{comp}(C) = \{\text{comp}(C, s = t) \mid s = t \text{ in } \Gamma \cup \Delta\}$

Dann ist $\succ_c$ gegeben durch

$$C \succ_c D \ \text{gdw} \ \text{comp}(C) \succ_1 \text{comp}(D)$$

Bemerkung zu $\succ_0$ und $\succ_c$

Bemerkung

Sei $C \equiv \Gamma \Rightarrow \Delta$, sei $s = t_1$ in Γ und $s = t_2$ in Δ und sei $s \succeq t_1, t_2$. Dann gilt $\text{comp}(C, s = t_1) \succ_0 \text{comp}(C, s = t_2)$.

Dies gilt auch für $t_1 \equiv t_2$. Eine Gleichung $s = t$ hat also eine größere Komplexität, wenn sie in Γ liegt, als wenn sie in Δ liegt.

Beachte

$C \succ_c D$ falls i) oder ii) oder iii):

i) Der größte Term in C ist echt größer als der größte Term in D.

ii) Der größte Term in C ist auch der größte Term in D und er kommt in C negativ und in D nur positiv vor.

iii) D entsteht aus C durch Ersetzen eines Terms durch einen kleineren Term oder durch Löschen eines Literals und gleichzeitiges Hinzufügen kleinerer Literale.

Also

$\mathcal{GH}$ ist verkleinernd: Die Konklusion ist in jeder Regel kleiner als die maximale (die rechte) Prämisse.

Beachte

$\succ_c$ ist eine Noethersche Partialordnung.