Applikative Inferenzregeln (2)

Ziel

Behandlung von verallgemeinerten Substitutionen.

Bezeichnung

Gilt $\mu(x) \in \mathsf{Term}(C, V^C)$ für alle $x \in V^C$, so ist μ eine **Konstruktorsubstitution**. Eine Substitution μ ist „im wesentlichen" eine Konstruktorsubstitution, falls $\mathrm{def}\mu(x)$ gültig ist für alle $x \in V^C$. Wir bezeichnen eine solche Substitution als **verallgemeinerte Substitution**.

Definition 4.25

$\mathsf{DefCond}(\mu, \Pi) = \{\neg\mathrm{def}\mu(x) \mid x \in \mathsf{Var}(\Pi) \cap V^C, \mu(x) \notin \mathsf{Term}(C, V^C)\}$

Beachte

Es gelte $\mathcal{A} \models \Pi$. Dann gilt für jede Konstruktor- und jede verallgemeinerte Substitution $\mathcal{A} \models \mu(\Pi)$; für beliebige Substitutionen μ gilt dies hingegen nicht, da diese Konstruktorvariablen an undefinierte Terme binden können.

Gilt $\mathcal{A} \models \neg\mathsf{DefCond}(\mu, \Pi)$, so ist μ eine verallgemeinerte Substitution bzgl. Π. Also gilt $\mathcal{A} \models \neg\mathsf{DefCond}(\mu, \Pi) \Rightarrow \mu(\Pi)$ bzw. $\mathcal{A} \models \mathsf{DefCond}(\mu, \Pi) \cup \mu(\Pi)$.

Applikative Inferenzregeln (3)

Beachte

Will man $\mu(\Pi)$ auf Γ anwenden, so müssen einige Voraussetzungen erfüllt sein:

Sei etwa Π von der Form $\Pi \equiv \Pi_0 \vee l = r$, also $\Pi \equiv \neg(\Pi_0) \Rightarrow l = r$, und es soll Γ mit $\mu(\Pi)$ umgeschrieben werden, also mit der Regel $\mu(l) \rightarrow \mu(r)$.

Dann müssen $\neg\mu(\Pi_0)$ und $\neg\mathsf{DefCond}(\mu, \Pi)$ bei der Anwendung auf die Klausel Γ gültig sein. Wie garantiert man dies?

Ansatz

Wir berechnen eine Klausel Θ, die gewährleistet, dass die Bedingungen im Kontext Θ gültig sind:

- $\mu(\Pi_0) \subseteq \Gamma \cup \Theta$ (damit $\neg\mu(\Pi_0)$ gültig ist),
- $\mathsf{DefCond}(\mu, \Pi) \subseteq \Gamma \cup \Theta$ (damit $\mu(\Pi)$ zulässig ist).

Wir wenden die Regel auf Γ im Kontext Θ an, d.h. auf $\Gamma \cup \Theta$.

Da wir Γ jedoch im leeren Kontext zeigen wollen, führen wir eine Fallunterscheidung nach Θ durch. Im letzten Fall dieser Fallunterscheidung ist der Kontext Θ erfüllt und wir können die Regel anwenden. In allen anderen Fällen müssen wir die Gültigkeit von Γ nachweisen, falls der Kontext nicht erfüllt ist. Meist dienen diese Fälle dazu im nachhinein zu zeigen, dass der Kontext von vornherein erfüllt war, indem man die Gültigkeit der durch die Fallunterscheidung neu eingeführten Literale nachweist.

Nicht-induktive Subsumption (1)

Regel

$$\frac{\langle \Gamma; \omega\rangle}{\langle \Delta_1, \Gamma; \omega\rangle \cdots \langle \Delta_n, \Gamma; \omega\rangle} \quad \text{mit } \langle \Pi, \omega'\rangle^{\mathcal{L}}$$

falls es μ und Θ gibt mit
- DefCond$(\mu, \Pi) \cup \mu(\Pi) \subseteq \Gamma \cup \Theta$,
- $\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Delta$ ist die Fallunterscheidung zu $\Delta = \Theta$.

Beachte

a) Sei $\mu(\Pi) \subseteq \Gamma$ und μ eine Konstruktorsubstitution. Dann ist DefCond$(\mu, \Pi) = \varnothing$ und man kann $\Theta = \varnothing$ wählen. Es entsteht kein neues Teilziel. Dies entspricht der klassischen Subsumption.

b) Sonst: Man benötigt Θ mit
- $\mu(\Pi) \subseteq \Gamma \cup \Theta$, damit $\mu(\Pi)$ $\Gamma \cup \Theta$ subsumiert,
- DefCond$(\mu, \Pi) \subseteq \Gamma \cup \Theta$ damit $\mu(\Pi)$ eine zulässige Instanz ist.

Das Teilziel zum Fall Δ muss nicht mehr nachgewiesen werden, da die Klausel $\Gamma \cup \Theta$ von $\mu(\Pi)$ subsumiert wird. Die oben angegebenen Teilziele gewährleisten, dass Γ auch dann gilt, falls der Kontext nicht erfüllt ist.

Gilt $\mu(\Pi) \subseteq \Gamma$ nicht, so spricht man von **partieller Subsumption**.

Nicht-induktive Subsumption (2)

Beispiel

a) Sei $x, x', y, y' \in V^C$, $a \in C$, $f, g \in D = F - C$
$\Pi \equiv x' + y' = y' + x'$
$\Gamma \equiv f(x) + g(a, y) = g(a, y) + f(x)$
$\mu = \{x' \leftarrow f(x), y' \leftarrow g(a, y)\}$

Dann ist DefCond$(\mu, \Pi) = \{\neg\mathrm{def}\, f(x), \neg\mathrm{def}\, g(a, y)\}$.
Wähle $\Theta =$ DefCond(μ, Π).
Dann gilt DefCond$(\mu, \Pi) \cup \mu(\Pi) \subseteq \Gamma \cup \Theta$, also

$$\frac{\langle \Gamma; \omega\rangle}{\langle \mathrm{def}\, f(x), \Gamma; \omega\rangle \quad \langle \mathrm{def}\, g(a, y), \neg\mathrm{def}\, f(x), \Gamma; \omega\rangle}$$

Das Lemma $\mathrm{def}\, f(x)$ würde das erste Teilziel subsumieren und das Lemma $\mathrm{def}\, g(x, y)$ würde das zweite Teilziel subsumieren.

b) Sei $\Gamma' = \Gamma, \neg\mathrm{def}\, f(x), \neg\mathrm{def}\, g(a, y)$.
Dann kann man $\Theta = \varnothing$ wählen und $\langle \Gamma'; \omega\rangle$ erzeugt kein neues Teilziel.

Nicht-induktive Subsumption (3)

Beispiel

Sei $\Gamma = \{ \lambda, \lambda' \}$ und $\Pi = \{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \}$ ein Lemma und μ eine Konstruktorsubstitution mit $\mu(\lambda_1) = \lambda$. Dann sind gültig:

$$\neg\mu(\lambda_2) \wedge \neg\mu(\lambda_3) \Rightarrow \lambda$$
$$\neg\mu(\lambda_2) \wedge \neg\mu(\lambda_3) \Rightarrow \Gamma$$

Für die Gültigkeit von Γ bleibt $\langle\neg\mu(\lambda_2), \Gamma; \omega)\rangle$ und $\langle\neg\mu(\lambda_3), \Gamma; \omega\rangle$ zu zeigen.

Anwendung der Subsumptionsregel liefert

$$\Delta = \Phi = \{ \mu(\lambda_2), \mu(\lambda_3) \},$$

also

$$\frac{\langle\Gamma; \omega\rangle}{\langle\neg\mu(\lambda_2), \Gamma; \omega\rangle\langle\neg\mu(\lambda_3), \mu(\lambda_2), \Gamma; \omega\rangle}$$

Also: Sind die beiden Teilziele gültig, so ist auch $\langle\Gamma; \omega\rangle$ gültig.

Nicht-induktive Termersetzung (1)

Beachte

Wir wollen Γ mit Π umschreiben: Es gebe ein λ in Γ und ein Atom $l = r$ in Π mit $\lambda/p \equiv \mu(l)$, es soll $\lambda[\mu(l)]_p$ durch $\lambda[\mu(r)]_p$ ersetzt werden.

Logisch hat Π die Form $\neg\Pi_0 \Rightarrow l = r$. Um die Termersetzung durchführen zu können, müssen $\neg\Pi_0$ und $\neg\text{DefCond}(\mu, \Pi)$ bei der Anwendung gültig sein.

Dies geschieht wie eben: Ist μ eine Konstruktorsubstitution und gilt $\mu(\Pi_0) \subseteq \Gamma$, so sind die Voraussetzungen erfüllt. Sonst benötigen wir ein Θ, das den benötigten Kontext erzeugt.

Regel Sei $\Gamma \equiv \Gamma_1, \lambda, \Gamma_2$ und $\Pi \equiv \Pi_1, l \doteq r, \Pi_2$

$$\frac{\langle\Gamma; \omega\rangle}{\langle\Delta_1, \Gamma; \omega\rangle \cdots \langle\Delta_n, \Gamma; \omega\rangle\ \langle\Delta, \Gamma_1, \lambda[\mu(r)]_p, \Gamma_2; \omega\rangle} \quad \text{mit } \langle\Pi; \omega'\rangle^{\mathcal{L}}$$

falls $\lambda/p \equiv \mu(l)$ und

- $\text{DefCond}(\mu, \Pi) \cup \mu(\Pi_1) \cup \mu(\Pi_2) \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{\mu(l) = \mu(r)\} \cup \Theta$
- $\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Delta$ ist die Fallunterscheidung zu $\Delta = \Theta$.

Nicht-induktive Termersetzung (2)

Beispiel

a) Sei $\Pi : \neg a = b \vee c = d \vee l = r_1$ (oder äquivalent dazu
$a = b \wedge c \neq d \Rightarrow l = r_1$)
$\Gamma : \neg a = b \vee l = r_2$ (oder $a = b \Rightarrow l = r_2$)
Es soll gelten $\{\neg a = b, c = d\} \subseteq \{\neg a = b, l = r_1\} \cup \Theta$.
Setze $\Theta = \{c = d\} = \Delta$, also $n = 1$ und $\Delta_1 = \{\neg c = d\}$
Es gilt

$$\frac{\langle \Gamma ; \omega \rangle}{\langle \neg c = d, \Gamma ; \omega \rangle \quad \langle c = d, \neg a = b, r_1 = r_2 ; \omega \rangle}$$

Also: Der Beweis zu $a = b \Rightarrow l = r_2$ reduziert sich auf die Beweise zu
$c = d \wedge a = b \Rightarrow l = r_2$ bzw. $\neg c = d \wedge a = b \Rightarrow r_1 = r_2$

b) Sei $\Pi' \equiv \Gamma$ und $\Gamma' \equiv \Pi$.
Hier subsumiert die Voraussetzung von Γ' die von Π': Es gilt $\{\neg a = b\} \subseteq \{\neg a = b, c = d, l = r_2\}$.
Also kann man $\Theta = \varnothing$ wählen.
Das Teilziel $\langle \Gamma' ; \omega \rangle$ produziert nur ein Teilziel, nämlich
$\langle \neg a = b, c = d, r_2 = r_1 ; \omega \rangle$.

Induktive Inferenzregeln

Beachte

Es soll die Induktionsvoraussetzung $\langle \Pi ; \omega' \rangle$ mit Substitution μ auf das Teilziel $\langle \Gamma ; \omega \rangle$ angewendet werden. Es gibt 2 Möglichkeiten: Subsumption und Termersetzung mit Π und μ.

Dazu müssen die bisherigen Bedingungen der Subsumption bzw. Termersetzung gelten und es muss $\mu(\omega') < \omega$ gelten.

Beispiel

Zu beweisen sei $\langle x + y = y + x ; y \rangle \equiv \langle \Pi ; \omega' \rangle$.

Dies führe zum Teilziel $\langle x + y = y + x ; s(y) \rangle \equiv \langle \Pi ; \omega \rangle$.

Dies kann man unterschiedlich behandeln:

i) Es subsumiert $\langle \Pi ; \omega' \rangle$ induktiv $\langle \Pi ; \omega \rangle$ mit $\mu = \mathrm{id}$.
ii) Die induktive Termersetzung mit $\langle \Pi ; \omega' \rangle$ und $\mu = \mathrm{id}$ überführt $\langle \Pi ; \omega \rangle$ in das triviale Teilziel $\langle x + y = x + y ; \omega \rangle$.

Beachte: In beiden Fällen gilt $\mu(\omega') < \omega$.

Induktive Subsumption

Beachte

Die Beachtung der Bedingung $\mu(\omega') < \omega$ überführt die Regel zur nicht-induktiven Subsumption in die folgende Regel.

Regel

$$\frac{\langle \Gamma; \omega \rangle}{\begin{array}{c}\langle \Delta_1, \Gamma; \omega \rangle \cdots \langle \Delta_n, \Gamma; \omega \rangle \\ \langle \mu(\omega') < \omega, \Delta, \Gamma; \omega \rangle\end{array}} \quad \text{mit } \langle \Pi; \omega' \rangle^{\mathcal{I}}$$

falls es μ und Θ gibt mit
- DefCond$(\mu, \Pi) \cup \mu(\Pi) \subseteq \Gamma \cup \Theta$,
- $\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Delta$ ist die Fallunterscheidung zu $\Delta = \Theta$.

Beachte

Das Literal $\mu(\omega') < \omega$ benötigt man nicht in den Teilzielen $\langle \Delta_i, \Gamma; \omega \rangle$ für die Zulässigkeit von μ. Sie tritt nur im letzten Teilziel auf.

Induktive Termersetzung

Beachte

Dies dient zum Umschreiben eines aktuellen Teilziels $\langle \Gamma; \omega \rangle$ mit einer Induktionsvoraussetzung $\langle \Pi; \omega' \rangle$.

Die Übertragung der Regel zur nicht-induktiven Termersetzung läuft wie eben.

Regel Sei $\Gamma \equiv \Gamma_1, \lambda, \Gamma_2$ und $\Pi \equiv \Pi_1, l \doteq r, \Pi_2$

$$\frac{\langle \Gamma; \omega \rangle}{\begin{array}{c}\langle \Delta_1, \Gamma; \omega \rangle \cdots \langle \Delta_n, \Gamma; \omega \rangle \ \langle \Delta, \Gamma_1, \lambda[\mu(r)]_p, \Gamma_2; \omega \rangle \\ \langle \mu(\omega') < \omega, \Delta', \Gamma; \omega \rangle\end{array}}$$

mit $\langle \Pi; \omega' \rangle^{\mathcal{I}}$, falls

- $\lambda/p \equiv \mu(l)$,
- DefCond$(\mu, \Pi) \cup \mu(\Pi_1) \cup \mu(\Pi_2) \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{\mu(l) = \mu(r)\} \cup \Theta$,
- $\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Delta$ ist die Fallunterscheidung zu $\Delta = \Theta$,
- $\Delta' \equiv \mu(l) = \mu(r), \Delta$.

Beispiel zur induktive Termersetzung

Beispiel

Zu beweisen sei

$$\langle \Pi ; \omega \rangle \equiv \langle x = y, \mathsf{less}(x, y) = \mathsf{true}, \mathsf{less}(y, x) = \mathsf{true}; x \rangle$$

Dies führe zum Teilziel

$$\begin{aligned} \langle \Gamma' ; \omega \rangle \quad &\equiv \quad \langle s(x) = s(y), \mathsf{less}(s(x), s(y)) = \mathsf{true}, \\ &\qquad \mathsf{less}(s(y), s(x)) = \mathsf{true}; s(x) \rangle \end{aligned}$$

Simplifikation von $\langle \Gamma' ; \omega \rangle$ führt zu

$$\langle \Gamma ; \omega \rangle \equiv \langle s(x) = s(y), \mathsf{less}(x, y) = \mathsf{true}, \mathsf{less}(y, x) = \mathsf{true}; s(x) \rangle$$

Induktive Termersetzung mit $\langle \Pi ; \omega \rangle$, $\Delta = \{ x = y \}$ und $\mu = \mathsf{id}$ führt zu

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_1 ; \omega \rangle \quad &\equiv \quad \langle \neg x = y, s(x) = s(y), \mathsf{less}(x, y) = \mathsf{true}, \\ &\qquad \mathsf{less}(y, x) = \mathsf{true}; s(x) \rangle \\ \langle \Gamma_2 ; \omega \rangle \quad &\equiv \quad \langle x < s(x), x = y, \Gamma ; s(x) \rangle \end{aligned}$$

Das Ziel $\langle \Gamma_1 ; \omega \rangle \equiv \langle \neg x = y, s(x) = s(y), \ldots ; s(x) \rangle$ führt zu $\langle \Gamma_1' ; \omega \rangle \equiv \langle \neg x = y, s(x) = s(x), \ldots ; s(x) \rangle$ und wird wegen des Atoms $s(x) = s(x)$ durch Säubern gelöst. Das Ziel $\langle \Gamma_2 ; \omega \rangle$ wird wegen des Atoms $x < s(x)$ auch durch Säubern gelöst.

Damit ist das Teilziel $\langle \Gamma ; \omega \rangle$ gelöst.

Die Inferenzregeln von QUODLIBET

Bemerkung

Die hier angegebenen Inferenzregeln dienten der Motivation und dem Verständnis, welche Arten von Inferenzregeln benötigt werden. Sie müssen für den praktischen Gebrauch noch verfeinert werden.

Ziel

Angabe aller Inferenzregeln von QUODLIBET.

Dazu

Wir benötigen einige Bezeichnungen.