1 Einleitung

Motivation

Sei sig $= (S, F, \alpha)$ eine Signatur.
E ein bedingtes Gleichungssystem über sig.
spec $=$ (sig, E) eine Spezifikation.

Frage

Was spezifiziert spec?

Welche sig-Algebren $\mathcal{A} \in$ Mod(spec) werden betrachtet?

Sei

$s = t$ eine Gleichung über sig.

Frage Was heißt „$s = t$ gilt in spec“?

Mögliche Präzisierungen zu „$s = t$ gilt in spec“

1. Präzisierung:

Gültigkeit in Mod(spec).

Für alle $\mathcal{A} \in$ Mod(spec) gilt $\mathcal{A} \models s = t$.

2. Präzisierung:

Gültigkeit in $\mathcal{L} \subseteq$ Mod(spec).

Für alle $\mathcal{A} \in \mathcal{L}$ gilt $\mathcal{A} \models s = t$.

Beispiel: $\mathcal{L} = \{\mathcal{A} \in$ Mod(spec) $\mid \mathcal{A}$ termerzeugt $\}$.

3. Präzisierung:

Gültigkeit in einer speziellen Algebra $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A} \models s = t$.

1. Beispiel: $\mathcal{A} =$ Initiales Modell von spec.

2. Beispiel: $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^*)$.

Fragen

Wie hängen die Gültigkeitsbegriffe zusammen?

Wie zeigt man „$s = t$ gilt in spec“ zu den verschiedenen Präzisierungen?

Beispiel: Listen über $\mathbb{N}$

Sei spec $=$ (sig, E).
sig $= (S, F, \alpha)$ mit
$S = \{\text{NAT}, \text{LIST}\}$, $F = \{0, s, +, \text{nil}, ., \text{app}\}$.

$$
\begin{aligned}
E : 0 + y &= y & \text{app}(\text{nil}, l_2) &= l_2 \\
s(x) + y &= s(x + y) & \text{app}(x.l_1, l_2) &= x.\text{app}(l_1, l_2)
\end{aligned}
$$

$\mathcal{A} = \mathcal{I}(\text{spec})$ das initiale Modell zu spec.

Die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&x + y = y + x \\
&\text{app}(\text{app}(l_1, l_2), l_3) = \text{app}(l_1, \text{app}(l_2, l_3))
\end{aligned}
$$

- gelten in $\mathcal{A}$,
- gelten in allen termerzeugten Modellen von spec,
- gelten nicht in allen Modellen von spec,
- gelten in $\mathcal{A}' = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^*)$ (bei „natürlicher“ Interpretation der $f \in F$).

Beispiel: Sortieren von Listen

Sei spec $=$ (sig, E).
sig $= (S, F, \alpha)$ mit
$S = \{\text{BOOL}, \text{NAT}, \text{LIST}\}$,
$F = \{\text{true}, \text{false}, 0, s, \leq, \text{nil}, ., \text{ins}, \text{isort}, \text{sorted}\}$.

$$
\begin{aligned}
E :\ & 0 \leq y = \text{true} \\
& s(x) \leq 0 = \text{false} \\
& s(x) \leq s(y) = x \leq y \\
& \text{ins}(x, \text{nil}) = x.\text{nil} \\
& \text{ins}(x, y.l) = x.y.l \Leftarrow x \leq y = \text{true} \\
& \text{ins}(x, y.l) = y.\text{ins}(x, l) \Leftarrow x \leq y = \text{false} \\
& \text{isort}(\text{nil}) = \text{nil} \\
& \text{isort}(x.l) = \text{ins}(x, \text{isort}(l))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{sorted}(\text{nil}) = \text{true} && \text{sorted}(x.y.l) = \text{false} \Leftarrow x \leq y = \text{false} \\
&\text{sorted}(x.\text{nil}) = \text{true} && \text{sorted}(x.y.l) = \text{sorted}(y.l) \Leftarrow x \leq y = \text{true}
\end{aligned}
$$

$\mathcal{A} = \mathcal{I}(\text{spec})$ das initiale Modell von spec.

Dies spezifiziert das Sortierverfahren *insertion sort*.

Es gilt

$\mathcal{A} \models$ sorted (isort(l))=true.

Frage

Wie zeigt man dies automatisch?

Beispiel: Schlange ohne Wiederholungen von Einträgen

Sei spec $=$ (sig, E).
sig $= (S, F, \alpha)$ mit
$S = \{\mathsf{BOOL}, \mathsf{NAT}, \mathsf{LIST}\}$,
$F = \{\mathsf{true}, \mathsf{false}, 0, s, \mathsf{nil}, ., \mathsf{top}, \mathsf{pop}, \mathsf{push}, \mathsf{elem}\}$.

E : $\mathsf{top}(x.l) = x$
$\mathsf{pop}(x.l) = l$
$\mathsf{push}(x, \mathsf{nil}) = x.\mathsf{nil}$
$\mathsf{push}(x, y.l) = y.l \Leftarrow x = y$
$\mathsf{push}(x, y.l) = y.\mathsf{push}(x, l) \Leftarrow x \neq y$
$\mathsf{elem}(x, \mathsf{nil}) = \mathsf{false}$
$\mathsf{elem}(x, y.l) = \mathsf{true} \Leftarrow x = y$
$\mathsf{elem}(x, y.l) = \mathsf{elem}(x, l) \Leftarrow x \neq y$

$\mathcal{A} = \mathcal{I}(\mathsf{spec})$.

Also

top und pop sind nur partiell spezifiziert.

spec benutzt negative Bedingungen, z. B. $\neg x = y$.

Frage

Gilt (1) oder (2)?

(1) $\mathcal{A} \models \mathsf{push}(x, \mathsf{push}(y, l)) = \mathsf{push}(y, \mathsf{push}(x, l))$.

(2) $\mathcal{A} \models \mathsf{elem}(x, l) = \mathsf{true} \Rightarrow \mathsf{push}(x, l) = l$.

2 Initiale Algebren zu Spezifikationen

Ziel von Kapitel 2

„Initiale Algebra“ hat in der Modelltheorie eine feste Bedeutung. Wir definieren dies.
Ist spec eine positiv-bedingte Spezifikation, so ist $\mathcal{I}$(spec) initial in der Klasse Mod(spec).

Wir zeigen den Zusammenhang auf zwischen „gültig in $\mathcal{I}$(spec)“ und „gültig in allen termerzeugten Modellen von spec“.

Sei R ein terminierendes und grund-konfluentes Regelsystem. Dann definiert R eine kanonische Termalgebra, die isomorph zu $\mathcal{I}$(spec) ist.

Wir entwickeln erste Hilfsmittel zum Beweis zu „$s = t$ ist gültig in $\mathcal{I}$(spec)“.

Voraussetzung in Kapitel 2

spec ist eine positiv-bedingte Spezifikation.

2.1 Initiale Algebren

Erinnerung

Sei sig $= (S, F, \alpha)$ eine feste **Signatur** mit

S=Menge von Sortensymbolen.

F=Menge von Funktionssymbolen.

$\alpha : F \to S^+$ Angabe der Stelligkeit der $f \in F$.
$f : s_1, \ldots, s_n \to s$ steht für $\alpha(f) = s_1, \ldots, s_n, s$.

Eine **sig-Algebra** $\mathcal{A} = ((A_s)_{s\in S}, (f^{\mathcal{A}})_{f\in F})$
besteht aus

- Trägermengen A_s für die $s \in S$. Sei $A = \bigcup_{s\in S} A_s$.
- Funktionen $f^{\mathcal{A}}$ zu den $f \in F$ mit
  $f^{\mathcal{A}} : A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n} \to A_s$, falls $\alpha(f) = s_1, \ldots, s_n, s$.

Also: $\mathcal{A}$ interpretiert

- die Sortensymbole $s \in S$ zu Mengen A_s,
- die Funktionssymbole $f \in F$ zu Funktionen $f^{\mathcal{A}}$.

sig-Homomorphismen (1)

Sei sig $= (S, F, \alpha)$ eine Signatur.
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sig-Algebren.

Definition 2.1

Ein **sig-Homomorphismus** $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist ein System $(\varphi_s)_{s\in S}$ von Funktionen $\varphi_s : A_s \to B_s$ mit

$\varphi_s(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(\varphi_{s_1}(a_1), \ldots, \varphi_{s_n}(a_n))$,
falls $f : s_1, \ldots, s_n \to s$.

Wir schreiben $\varphi(a)$ statt $\varphi_s(a)$, falls $a \in A_s$.

φ ist ein sig-Homomorphismus von $\mathcal{A}$ **auf** $\mathcal{B}$, falls zu jedem $b \in B_s$ ein $a \in A_s$ existiert mit $\varphi(a) = b$.

φ ist ein **sig-Isomorphismus**, falls alle φ_s bijektiv sind.

Beispiel

Sei $\mathcal{A}$ die freie Termalgebra über sig, also $A_s = \mathrm{Term}_s(F)$ und $f^{\mathcal{A}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$. Sei φ gegeben durch

$$\varphi(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{B}}(\varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_n))$$

Dann ist $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein sig-Homomorphismus.

Schreibweise

$\varphi(t) = t^{\mathcal{B}}$ „Auswertung von $t \in \mathrm{Term}(F)$ in $\mathcal{B}$“.

sig-Homomorphismen (2)

Bezeichnung

Die sig-Algebra $\mathcal{A}$ **identifiziert** $t_1, t_2 \in \mathsf{Term}(F)$, falls $t_1^{\mathcal{A}} = t_2^{\mathcal{A}}$ gilt.

Lemma 2.1

Sei $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein sig-Homomorphismus:

a) Für alle $t \in \mathsf{Term}(F)$ gilt $\varphi(t^{\mathcal{A}}) = t^{\mathcal{B}}$.
b) Aus $t_1^{\mathcal{A}} = t_2^{\mathcal{A}}$ folgt $t_1^{\mathcal{B}} = t_2^{\mathcal{B}}$.

Beweis:

a) Induktion über den Aufbau von t.
   $t \equiv c$: Es gilt $\varphi(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$
   $t \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$: Es gilt
   $$\varphi(f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{A}}) = \varphi(f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}})) =$$
   $$= f^{\mathcal{B}}(\varphi(t_1^{\mathcal{A}}), \ldots, \varphi(t_n^{\mathcal{A}})) =_{IV} f^{\mathcal{B}}(t_1^{\mathcal{B}}, \ldots, t_n^{\mathcal{B}}) =$$
   $$= f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{B}}$$

b) Es gilt mit a)
   $t_1^{\mathcal{B}} = \varphi(t_1^{\mathcal{A}}) = \varphi(t_2^{\mathcal{A}}) = t_2^{\mathcal{B}}$

Beispiel zu sig-Homomorphismen

Sei $\mathsf{sig} = (\{\mathsf{ANY}\}, \{0, s, +\}, \alpha)$.
$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{0, +1, +\})$,
$\mathcal{B} = (\mathbb{Z}, \{0, +2, +\})$.

Es gilt

a) $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\varphi(n) = 2 \cdot n$ ist ein sig-Homomorphismus, denn

   $\varphi(0^{\mathcal{A}}) = \varphi(0) = 0^{\mathcal{B}}$
   $\varphi(s^{\mathcal{A}}(n)) = \varphi(n+1) = 2(n+1) = 2n+2 = s^{\mathcal{B}}(\varphi(n))$
   $\varphi(n +^{\mathcal{A}} m) = 2(n+m) = 2n+2m = \varphi(n) +^{\mathcal{B}} \varphi(m)$

b) Es gibt keinen sig-Homomorphismus $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, denn sonst $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$.
   $0 = \varphi(0) = \varphi(-2+2) = \varphi(-2) + \varphi(2)$ in $\mathcal{A}$, also $\varphi(2) = \varphi(-2) = 0$,
   aber $\varphi(2) = \varphi(s^{\mathcal{B}}(0)) = s^{\mathcal{A}}(0) = 1 \neq 0$

sig-Homomorphismen (3)

Seien sig $= (S, F, \alpha)$.
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sig-Algebren.

Definition 2.2

$\mathcal{A}$ heißt **termerzeugt**, wenn es zu jedem $a \in A$ ein $t_a \in \text{Term}(F)$ gibt mit $a = t_a^{\mathcal{A}}$.

Beispiel wie auf letzter Folie.

$\mathcal{A}$ ist termerzeugt, $\mathcal{B}$ nicht.

Lemma 2.2

Sei $\mathcal{A}$ termerzeugt. Ist $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein sig-Homomorphismus, so ist φ gegeben durch $\varphi(t_a^{\mathcal{A}}) = t_a^{\mathcal{B}}$. Es gibt also in diesem Fall maximal einen sig-Homomorphismus.

Beweis:

Zu jedem $a \in A$ gibt es ein t_a mit $a = t_a^{\mathcal{A}}$. Nach Lemma 2.1 gilt $\varphi(t_a^{\mathcal{A}}) = t_a^{\mathcal{B}}$. Dadurch ist φ auf A eindeutig festgelegt.

Initiale Algebren

Sei $\mathcal{A}$ sig-Algebra.
$\mathcal{L}$ Klasse von sig-Algebren.

Definition 2.3

$\mathcal{A}$ heißt **initial** in $\mathcal{L}$, falls gilt

1. $\mathcal{A} \in \mathcal{L}$.
2. Zu jedem $\mathcal{B} \in \mathcal{L}$ gibt es genau einen sig-Homomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Lemma 2.3

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ initial in $\mathcal{L}$, so sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sig-isomorph.

Beweis:

Die Identität $\text{id}_{\mathcal{A}}$ ist der einzige sig-Homomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Es gibt sig-Homomorphismen $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Dann sind $\varphi \circ \psi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ und $\psi \circ \varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sig-Homomorphismen.

Also gilt $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\mathcal{B}}$ und $\psi \circ \varphi = \text{id}_{\mathcal{A}}$.

Also gilt $\psi = \varphi^{-1}$ und φ ist ein sig-Isomorphismus.

Bedingte Gleichheitsspezifikationen

Definition 2.4

Eine **(bedingte) Spezifikation** hat die Form spec $=$ (sig, E) mit

- sig $= (S, F, \tau)$ Signatur.
- E System bedingter Gleichungen.
- Eine bedingte Gleichung hat die Form
  $s = t \Leftarrow u_1 = v_1 \wedge \cdots \wedge u_n = v_n$

Schreibweise

Sei $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$:

- $s = t \Leftarrow u = v$ statt $s = t \Leftarrow u_1 = v_1 \wedge \cdots \wedge u_n = v_n$
- $s = t$ statt $s = t \Leftarrow \qquad (n = 0)$
- $\sigma(u) = \sigma(v)$ statt $\sigma(u_i) = \sigma(v_i)$, $i = 1, \ldots, n$, falls σ Substitution.

Ab jetzt: „Spezifikation“ meint „bedingte Spezifikation“.

Beachte

$s = t \Leftarrow u = v$ steht für $\forall^*(u = v \Rightarrow s = t)$

Sei $\mathcal{A}x_E = \{\forall^*(u = v \Rightarrow s = t) \mid s = t \Leftarrow u = v \text{ in } E\}$

spec $=$ (sig, E) steht für spec $=$ (sig, $\mathcal{A}x_E$)

Definition von $=_E$

Idee

- unbedingtes Gleichungssystem E_i definieren.
- E_i approximiert E bis zur Rekursionstiefe i.

Sei spec $=$ (sig, E)

Definition 2.5 der E_i und von $=_E$

- $E_0 = \varnothing$.
- $E_{i+1} = \{\sigma(s) = \sigma(t) \mid s = t \Leftarrow u = v \text{ in } E,$
  $\sigma(u) =_{E_i} \sigma(v)\}$
- $=_i \; = \; =_{E_i}$
- $s =_E t \text{ gdw } \exists i : s =_i t$

Beachte

a) Es gilt $E_i \subseteq E_{i+1}$. (Induktion nach i)

b) Die E_i sind **unbedingte** Gleichungssysteme, also sind die $=_i$ wohl-definiert (wie früher). Damit ist auch $=_E$ wohl-definiert.

Satz 2.1.

Es gilt stets

$$s =_E t \text{ gdw } \mathcal{A} \models s = t \text{ für alle } \mathcal{A} \in \text{Mod(spec)}$$

Beweis: Übung.

Initiale Modelle

Sei spec $=$ (sig, E) positiv-bedingte Spezifikation.
$\mathcal{L} = \mathrm{Mod}(\mathrm{spec})$.

Beachte

Es gibt nach Lemma 2.3 (bis auf Isomorphie) höchstens eine initiale Algebra in $\mathcal{L}$. Wir zeigen, dass es eine gibt.

Definition 2.6

$\mathcal{I}(\mathrm{spec})$ ist folgende sig-Algebra $\mathcal{I} = ((I_s)_{s\in S}, (f^{\mathcal{I}})_{f\in F})$

$I_s = \{[t] \mid t \in \mathrm{Term}_s(F)\}$ mit
$[t] = \{t' \in \mathrm{Term}(F) \mid t =_E t'\}$

$f^{\mathcal{I}}([t_1], \ldots, [t_n]) = [f(t_1, \ldots, t_n)]$.

Lemma 2.4

$\mathcal{I}(\mathrm{spec})$ ist ein termerzeugtes Modell zu spec. Es gilt $t^{\mathcal{I}} = [t]$ für alle $t \in \mathrm{Term}(F)$.

Beweis: Übung.

Bemerkung zu $\mathcal{I}$(spec)

Bemerkung

Sei sig $= (S, F, \alpha)$, spec $=$ (sig, E).

$\mathcal{I}(\mathrm{spec})$ hängt von sig und E ab, nicht nur von E.

Beispiel

Sei $S = \{\mathrm{ANY}\}$, $F = \{0, +\}$, $F' = \{0, 1, +\}$.

$E: 0+x = x \qquad x+y = y+x \qquad x+(y+z) = (x+y)+z$.

a) sig $= (S, F, \alpha)$, spec $=$ (sig, E).
Es besteht $\mathcal{I}(\mathrm{spec})$ nur aus einem Element: $[0]$.

b) sig$' = (S, F', \alpha)$ spec$' =$ (sig$'$, E).
Es besteht $\mathcal{I}(\mathrm{spec})$ aus unendlich vielen Elementen:
$I_{\mathrm{ANY}} = \{[\underline{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $\underline{0} = 0$ und $\underline{n} = 1 + (1 + \cdots + (1+1)\cdots)$ für $n > 0$.

Das initiale Modell zu spec

Sei spec $=$ (sig, E) eine bedingte Spezifikation.

Satz 2.2.

$\mathcal{I} = \mathcal{I}(\text{spec})$ ist initial in Mod(spec).

Beweis:

Es gilt $\mathcal{I} \in \text{Mod(spec)}$ und $\mathcal{I}$ ist termerzeugt nach Lemma 2.4.

Nach Lemma 2.2 reicht also zu zeigen:
Ist $\mathcal{B} \in \text{Mod(spec)}$ und $\varphi : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$ definiert durch $\varphi(t^{\mathcal{I}}) = t^{\mathcal{B}}$, so ist φ ein sig-Homomorphismus.

Beachte: $t^{\mathcal{I}} = [t]$.

1. φ ist wohl-definiert: Sei $[s] = [t]$. Dann gilt $s =_E t$ und somit $s^{\mathcal{B}} = t^{\mathcal{B}}$, da $B \in \text{Mod(spec)}$.
2. φ ist ein sig-Homomorphismus: $\varphi(f^{\mathcal{I}}([t_1], \ldots, [t_n])) = \varphi([f(t_1, \ldots, t_n)]) = f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{B}}(t_1^{\mathcal{B}}, \ldots, t_n^{\mathcal{B}}) = f^{\mathcal{B}}(\varphi([t_1]), \ldots, \varphi([t_n]))$

Folgerung

Sei $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\text{spec})$, $\mathcal{A} \in \text{Mod(spec)}$, $t_1, t_2 \in \text{Term}(F)$.

Aus $\mathcal{I} \models t_1 = t_2$ folgt $\mathcal{A} \models t_1 = t_2$.

Beweis:

Aus $\mathcal{I} \models t_1 = t_2$ folgt $[t_1] = [t_2]$, also $t_1^{\mathcal{I}} = t_2^{\mathcal{I}}$.

Dies liefert $t_1^{\mathcal{A}} = \varphi(t_1^{\mathcal{I}}) = \varphi(t_2^{\mathcal{I}}) = t_2^{\mathcal{A}}$, also $\mathcal{A} \models t_1 = t_2$.

Kanonische Termalgebren (1)

Beachte

Die Elemente $[t]$ von $\mathcal{I}(\text{spec})$ sind (i. Allg. unendliche) Mengen.

Es rechnet sich leichter mit Repräsentanten $\hat{t} \in [t]$ statt mit den $[t]$.

Frage: Gibt es natürliche (kanonische) Repräsentanten?

Sei spec $=$ (sig, R).
R terminierend und grundkonfluent.

Definition 2.7

Die **kanonische Termalgebra** $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\text{spec}) = ((T_s)_{s \in S}, (f^{\mathcal{T}})_{f \in F})$ ist gegeben durch

$T_s = \{t \in \text{Term}_s(F) \mid t\ R\text{-irreduzibel}\}$.

$f^{\mathcal{T}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)\downarrow$.

Kanonische Termalgebren (2)

Beispiel

$S = \{\mathsf{NAT}\}$, $F = \{0, s, +, *\}$.

R: $x + 0 \to x$ $\quad x * 0 \to 0$
$\quad x + s(y) \to s(x + y) \quad x * s(y) \to (x * y) + x$

Es gilt für alle $t \in \mathsf{Term}(F)$:

t ist irreduzibel gdw $\;t \equiv s^i(0)$ für ein $i \in \mathbb{N}$.

Also:

$T_{\mathsf{ANY}} = \{s^i(0) \mid i \in \mathbb{N}\}$.

$0^{\mathcal{T}} = 0 \qquad s^i(0) +^{\mathcal{T}} s^j(0) = s^{i+j}(0)$
$s^{\mathcal{T}}(s^i(0)) = s^{i+1}(0) \qquad s^i(0) *^{\mathcal{T}} s^j(0) = s^{i*j}(0)$

Satz 2.3.

Sei R terminierend und grundkonfluent. Dann sind $\mathcal{I}(\mathsf{spec})$ und $\mathcal{T}(\mathsf{spec})$ isomorph.

Beweis:

$\varphi : \mathcal{I}(\mathsf{spec}) \to \mathcal{T}(\mathsf{spec})$ mit $\varphi([t]) = t{\downarrow_R}$ ist ein sig-Isomorphismus (Übung!)

Beispiel zu $\mathcal{T}(\mathsf{spec})$

Sei $\mathsf{spec} = (\mathsf{sig}, R)$.
$\mathsf{sig} = (\{\mathsf{ANY}\}, \{0, s, +, *\}, \alpha)$.

R: $x + 0 \to x \quad x * 0 \to 0$
$\quad x + s(y) \to s(x + y) \quad x * s(y) \to (x * y) + x$

Es ist R konvergent.

a) $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{0, +1, +, \cdot\})$.
$\mathcal{A}$ ist isomorph zu $\mathcal{T}(\mathsf{spec})$, also initial in $\mathsf{Mod}(\mathsf{spec})$.
Denn $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{T}(\mathsf{spec})$, $\varphi(n) = s^n(0)$ ist sig-Isomorphismus.

b) $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}, \{0, +1, +, \cdot\})$.
Es gilt $\mathcal{B} \in \mathsf{Mod}(\mathsf{spec})$, aber $\mathcal{B}$ ist nicht initial in $\mathsf{Mod}(\mathsf{spec})$.
Denn: Es gibt keinen sig-Homomorphismus $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$.