Übungen zur Vorlesung

Theorembeweisen in der Induktiven Theorie

Prof. Dr. J. Avenhaus
Technische Universität Kaiserslautern
WS 2003/04
Blatt 7 / 29. Januar 2004

Informationen zur Vorlesung:
`http://www-avenhaus.informatik.uni-kl.de/ag-avenhaus/chronologisch/ws2003-2004/ind`

1. Aufgabe: Es sei $\mathrm{sig} = (S, C, F, \alpha)$ eine Signatur mit $S = \{\mathrm{NAT}, \mathrm{LIST}\}$, $C = \{0, s, \mathrm{nil}, .\}$ und $F = C \cup \{\mathrm{plus}, \mathrm{ack}, \mathrm{len}, \mathrm{app}\}$. Sei schließlich $\mathrm{spec} = (\mathrm{sig}, E)$ gegeben durch

$$\begin{array}{lcllcl}
\mathrm{plus}(x, 0) & = & x & \mathrm{plus}(x, s(y)) & = & s(\mathrm{plus}(x, y)) \\
\mathrm{len}(\mathrm{nil}) & = & 0 & \mathrm{len}(x.l) & = & s(\mathrm{len}(l)) \\
\mathrm{ack}(0, y) & = & s(y) & \mathrm{ack}(s(x), 0) & = & \mathrm{ack}(x, s(0)) \\
\mathrm{ack}(s(x), s(y)) & = & \mathrm{ack}(x, \mathrm{ack}(s(x), y)) & & &
\end{array}$$

Bei diversen Induktionsbeweisen entstehen die folgenden Ordnungsbedingungen. Instanziieren Sie die Gewichtsvariablen (möglichst einfach), so dass die Ordnungsbedingungen erfüllt werden können, und weisen sie die entstehenden Ordnungsbedingungen nach.

1. $\omega_1(x, y) < \omega_1(s(x), s(y))$
2. $\omega_2(x, y) < \omega_2(x, s(y))$
3. $\omega_3(x, s(0)) < \omega_3(s(x), 0)$, $\quad \omega_3(s(x), y) < \omega_3(s(x), s(y))$,
   $\omega_3(x, \mathrm{ack}(s(x), y)) < \omega_3(s(x), s(y))$
4. $\omega_4(l_1, y.l_2) < \omega_4(x.l_1, y.l_2)$, $\quad \omega_4(x.l_1, l_2) < \omega_4(x.l_1, y.l_2)$
5. $\omega_5(x.l) < \omega_5(x.y.l)$
6. $\omega_6(x.l) < \omega_6(y.z.l)$, $\quad \omega_6(\mathrm{nil}) < \omega_6(x.l)$
7. $\omega_7(x) < \omega_8(x)$, $\quad \omega_8(x) < \omega_7(s(x))$

2. Aufgabe: Sei $\mathrm{sig} = (S, C, F, \alpha)$ eine Signatur mit $S = \{\mathrm{BOOL}, \mathrm{NAT}, \mathrm{LIST}\}$, $C = \{\mathrm{false}, \mathrm{true}, 0, s, \mathrm{nil}, .\}$ und $F = C \cup \{\mathrm{app}, \mathrm{elem}\}$. Sei weiterhin $\mathrm{spec} = (\mathrm{sig}, E)$ gegeben durch

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{app}(\mathrm{nil}, l_2) = l_2, & \mathrm{app}(x.l_1, l_2) = x.\mathrm{app}(l_1, l_2) \\
\mathrm{elem}(x, \mathrm{nil}) = \mathrm{false}, & \mathrm{elem}(x, \mathrm{cons}(y, l)) = \mathrm{true} \Leftarrow x = y \\
\mathrm{elem}(x, y.l) = \mathrm{elem}(x, l) \Leftarrow x \neq y &
\end{array}$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{DMod}(\mathrm{spec}) \models \mathrm{elem}(x, \mathrm{app}(l_1, l_2)) \neq \mathrm{true} \vee \mathrm{elem}(x, l_1) = \mathrm{true} \vee \mathrm{elem}(x, l_2) = \mathrm{true}$$

gilt mit Hilfe der Inferenzregeln von QUODLIBET.
Hinweis: Zeigen sie zunächst das Lemma def $\mathrm{app}(l_1, l_2)$.

3. Aufgabe: Es sei spec $= (\text{sig}, E)$ und mit sig $= (S, C, F, \alpha)$, $S = \{\text{NAT}, \text{LIST}\}$, $C = \{0, s, \text{nil}, .\}$, $F = C \cup \{\text{app}, \text{rev}\}$. Ferner sei E gegeben durch

$$\begin{array}{ll} \text{app}(\text{nil}, l_2) = l_2, & \text{app}(x.l_1, l_2) = x.\text{app}(l_1, l_2) \\ \text{rev}(\text{nil}) = \text{nil}, & \text{rev}(x.l) = \text{app}(\text{rev}(l), x.\,\text{nil}) \end{array}$$

Zeigen Sie $\text{rev}(\text{rev}(l)) = l$ mit Hilfe der Inferenzregln von QUODLIBET.

Abgabe: bis 16.01.04 im 4. Stock, Gebäude 34