Übungen zur Vorlesung

Theorembeweisen in der Induktiven Theorie

Prof. Dr. J. Avenhaus
Technische Universität Kaiserslautern
WS 2003/04
Blatt 4 / 4. Dezember 2003

Informationen zur Vorlesung:
`http://www-avenhaus.informatik.uni-kl.de/ag-avenhaus/chronologisch/ws2003-2004/ind`

1. Aufgabe: Sei $\mathrm{sig} = (S, C, F, \alpha)$ eine Signatur mit $S = \{\mathrm{BOOL}, \mathrm{NAT}\}$, $F = \{\mathrm{true}, \mathrm{false}, \mathrm{less}, 0, s, \mathrm{minus}, \mathrm{div}\}$ und $C = \{\mathrm{true}, \mathrm{false}, 0, s\}$. Seien weiterhin $x, y \in V^C$ und $\mathrm{spec} = (\mathrm{sig}, R)$ gegeben durch

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{minus}(x,0) \to x; & \mathrm{minus}(s(x), s(y)) \to \mathrm{minus}(x,y); \\
\mathrm{less}(x,0) \to 0; & \mathrm{less}(0, s(y)) \to \mathrm{true}; \\
\mathrm{less}(s(x), s(y)) \to \mathrm{less}(x,y); & \\
\mathrm{div}(x,y) \to 0 \quad \Leftarrow y \neq 0,\ \mathrm{less}(x,y) = \mathrm{true}; & \\
\mathrm{div}(x,y) \to s(\mathrm{div}(\mathrm{minus}(x,y),y)) \quad \Leftarrow y \neq 0,\ \mathrm{less}(x,y) \neq \mathrm{true},\ \mathrm{def}(\mathrm{less}(x,y)). &
\end{array}
$$

Zeigen Sie, dass spec eine zulässige Spezifikation ist.

2. Aufgabe: Sei $\mathrm{sig} = (S, C, F, \alpha)$ eine Signatur mit $S = \{\mathrm{NAT}\}$, $F = \{0, s, -\}$ und $C = \{0, s\}$. Seien weiterhin $x, y \in V^C$ und $\mathrm{spec} = (\mathrm{sig}, R)$ gegeben durch

$$R: \ x - 0 \to x; \quad s(x) - s(y) \to x - y$$

Sei $\mathrm{spec}' = (\mathrm{sig}, R')$ mit $R' = R \cup \{0 - y \to y\}$.

1. Zeigen Sie, dass spec' eine konstruktorkonsistente Erweiterung von spec ist.
2. Seien $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathrm{spec})$ und $\mathcal{M}' = \mathcal{M}(\mathrm{spec}')$ die Standard-Datenmodelle zu spec bzw. spec'. Zeigen oder widerlegen Sie:
   (a) $\mathcal{M} \models x - y \neq 0 \lor \neg\mathrm{def}(x-y) \lor x = y$
   (b) $\mathrm{DMod}(\mathrm{spec}) \models x - y \neq 0 \lor \neg\mathrm{def}(x-y) \lor x = y$
   (c) $\mathcal{M}' \models x - y \neq 0 \lor \neg\mathrm{def}(x-y) \lor x = y$
   (d) $\mathrm{DMod}(\mathrm{spec}') \models x - y \neq 0 \lor \neg\mathrm{def}(x-y) \lor x = y$

   Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit Satz 4.1 und Satz 4.4.

3. Aufgabe: Sei $\mathrm{sig} = (S, C, F, \alpha)$ eine Signatur mit $S = \{\mathrm{NAT}\}$, $F = \{0, s, +\}$ und $C = \{0, s\}$. Seien weiterhin $x, y \in V^C$ und $\mathrm{spec} = (\mathrm{sig}, R)$ gegeben durch

$$\begin{array}{lcl} x + 0 & \rightarrow & x \\ x + s(y) & \rightarrow & s(x + y) \end{array}$$

Seien $\mathrm{spec}_i = (\mathrm{sig}_i, R_i)$ gegeben durch

- $\mathrm{sig}_1 = (F \cup \{1\}, C \cup \{1\}, \alpha)$, $R_1 = R$;
- $\mathrm{sig}_2 = (F \cup \{1\}, C \cup \{1\}, \alpha)$, $R_2 = R \cup \{1 \rightarrow s(s(0))\}$;
- $\mathrm{sig}_3 = (F \cup \{1\}, C, \alpha)$, $R_3 = R \cup \{1 \rightarrow s(s(0))\}$;
- $\mathrm{sig}_4 = \mathrm{sig}$, $R_4 = R \cup \{s^2(x) \rightarrow x\}$.
- $\mathrm{sig}_5 = \mathrm{sig}$, $R_5 = R \cup \{s(0) + s(0) \rightarrow 0\}$.

1. Zeigen oder widerlegen Sie für $i \in \{1, \ldots, 5\}$: spec_i ist eine konstruktorkonsistente Erweiterung von spec.

2. Es gilt:

   - $\mathrm{DMod(spec)} \models x + y = y + x$
   - $\mathrm{DMod(spec)} \models s^2(0) \neq 0$

   Zeigen Sie oder widerlegen Sie:

   (a) $\mathrm{DMod(spec_1)} \models x + y = y + x$
   (b) $\mathrm{DMod(spec_2)} \models x + y = y + x$
   (c) $\mathrm{DMod(spec_3)} \models x + y = y + x$
   (d) $\mathrm{DMod(spec_4)} \models s^2(0) \neq 0$
   (e) $\mathrm{DMod(spec_5)} \models s^2(0) \neq 0$

   Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit Satz 4.4.

Abgabe: bis Montag, den 5.1.2004 im 4. Stock, Gebäude 34