Übungen zur Vorlesung

Theorembeweisen in der Induktiven Theorie

Prof. Dr. J. Avenhaus
Technische Universität Kaiserslautern
WS 2003/04
Blatt 3 / 19. November 2003

Informationen zur Vorlesung:
`http://www-avenhaus.informatik.uni-kl.de/ag-avenhaus/chronologisch/ws2003-2004/ind`

1. Aufgabe: Es sei sig $= (S, F, \alpha)$ eine Signatur mit $S = \{\text{BOOL}, \text{NAT}\}$, $F = \{\text{true}, \text{false}, \geq, >, \neg, 0, s, +, -, \cdot, \exp, A, \text{bin}, \text{fib}, \text{div}, \text{mod}, \text{fac}\}$.
Ferner sei R gegeben durch

$$R: \begin{array}{ll}
\neg\,\text{true} \longrightarrow \text{false}, & \neg\,\text{false} \longrightarrow \text{true}, \\
x \geq 0 \longrightarrow \text{true}, & 0 \geq s(x) \longrightarrow \text{false}, \\
s(x) \geq s(y) \longrightarrow x \geq y, & \\
x > y \longrightarrow \neg y \geq x & \\
x + 0 \longrightarrow x, & x + s(y) \longrightarrow s(x + y), \\
0 - x \longrightarrow 0, & x - 0 \longrightarrow x, \\
s(x) - s(y) \longrightarrow x - y, & \\
x \cdot 0 \longrightarrow 0, & x \cdot s(y) \longrightarrow (x \cdot y) + x, \\
\exp(x, 0) \longrightarrow s(0), & \exp(x, s(y)) \longrightarrow x \cdot \exp(x, y), \\
\text{fib}(0) \longrightarrow s(0), & \text{fib}(s(0)) \longrightarrow s(0), \\
\text{fib}(s(s(x))) \longrightarrow \text{fib}(x) + \text{fib}(s(x))), & \\
\text{fac}(0) \longrightarrow s(0), & \text{fac}(s(x)) \longrightarrow s(x) \cdot \text{fac}(x), \\
\text{mod}(x, y) \longrightarrow x \Leftarrow y > x, & \text{mod}(x, y) \longrightarrow \text{mod}(x - y, y) \Leftarrow x \geq y, \\
\text{div}(x, y) \longrightarrow 0 \Leftarrow y > x, & \text{mod}(x, y) \longrightarrow s(\div(x - y, y)) \Leftarrow x \geq y, \\
\text{bin}(x, 0) \longrightarrow s(0), & \text{bin}(s(x), s(y)) \longrightarrow \text{bin}(x, y) + \text{bin}(x, s(y)), \\
A(0, y, z) \longrightarrow y + z, & A(s(0), y, z) \longrightarrow y \cdot z \\
A(s(s(0)), y, z) \longrightarrow \exp(y, z), & A(s(s(s(x))), y, 0) \longrightarrow y \\
A(s(s(s(x))), y, s(z)) \longrightarrow A(s(s(x)), y, A(s(s(s(x))), y, z)) &
\end{array}$$

1. Zeigen Sie, dass spec $= (\text{sig}, R)$ keine Konstruktorbasierte Spezifikation ist. Wie kann man aus spec eine Konstruktorbasierte Spezifikation machen?

2. Geben Sie die Coversets C_f für alle in Frage kommenden $f \in F$ an. Welche dieser Coversets sind vollständig?

3. Zeigen Sie $\exp(s(s(0)), x) \geq \text{fib}(x) \in ITh(\text{spec})$ mit der Coverset-Methode (Satz 3.1). Wählen Sie dazu ein geeignetes Induktionsschema. Lemmata mit Symbolen aus $\text{true}, \text{false}, \neg, \geq, >, 0, s, +, -, \cdot$ können ohne Beweis verwendet werden.

4. Gilt $\text{bin}(x, y) \cdot (\text{fac}(y) \cdot \text{fac}(x - y)) = \text{fac}(x) \in ITh(\text{spec})$? Eine anschauliche Begründung reicht.

5. Zeigen Sie, dass $(x + y) + z = x + (y + z) \notin ITh(\text{spec})$ gilt. Wie kann man spec ändern, dass man die Assoziativität von $+$ im initialen Modell durch Konsistenzprüfung zeigen kann?

2. Aufgabe: Zeigen Sie Lemma 3.4:
Sei sig $= (S, F, \alpha)$ eine Signatur, R ein terminierendes Regelsystem über sig und C_R die durch R definierte Konstruktormenge. Enthält $t \in \mathrm{Term}(F, V)$ ein $f \in F \setminus C_R$, so ist t grundreduzierbar.

3. Aufgabe: Es sei spec $= (\mathrm{sig}, R)$ ein bedingtes Regelsystem mit sig $= (S, F, \alpha)$ und spec$' = (\mathrm{sig}', R \cup R')$ sei eine Erweiterung (sig$' = (S \cup S', F \cup F', \alpha \cup \alpha')$) von spec.
Sind spec und spec$'$ grundkonfluent, gibt es für alle Regeln $l \longrightarrow r \in R'$ ein Funktionssymbol $f \notin F$, das in l vorkommt, und sind für alle Sorten $s \in S$ die Terme $t \in \mathrm{Term}_s(F', V) \setminus \mathrm{Term}_s(F, V)$ grundreduzierbar (mit $R \cup R'$) so folgt $ITh(\mathrm{spec}) \subseteq ITh(\mathrm{spec}')$.

Abgabe: bis Montag, den 8.12.2003 im 4. Stock, Gebäude 34