Übungen zur Vorlesung

Theorembeweisen in der Induktiven Theorie

Prof. Dr. J. Avenhaus
Technische Universität Kaiserslautern
SS 2003
Blatt 1 / 28. Oktober 2003

Informationen zur Vorlesung:
`http://www-avenhaus.informatik.uni-kl.de/ag-avenhaus/chronologisch/ws2003-2004/ind`

1. Aufgabe: Zeigen Sie die Umkehrung von Lemma 2.3:
Ist $\mathcal{A}$ initial in $\mathcal{L}$ und sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ isomorph, so ist auch $\mathcal{B}$ initial in $\mathcal{L}$.

2. Aufgabe: Es sei spec $= (\text{sig}, E)$ mit sig $= (S, F, \alpha)$ und $S = \{\text{NAT}\}$ und $F = \{0, s, +\}$. Ferner sei

$$E = \{ \quad x + 0 = x \\ \quad x + s(y) = s(x + y) \quad \}.$$

Betrachte die Modelle $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ von spec mit

- $\text{NAT}^{\mathcal{A}} = \mathbb{N}$, $0^{\mathcal{A}} = 0$, $s^{\mathcal{A}}(n) = n + 1$ und $+^{\mathcal{A}}(n, m) = n + m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$;
- $\text{NAT}^{\mathcal{B}} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $0^{\mathcal{B}} = 0$, $s^{\mathcal{B}}(n) = n + 1 \bmod 5$ und $+^{\mathcal{B}}(n, m) = n + m \bmod 5$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$;
- $\text{NAT}^{\mathcal{C}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $0^{\mathcal{C}} = 0$, $s^{\mathcal{C}}(n) = n+1$, $s^{\mathcal{C}}(\infty) = \infty$, $+^{\mathcal{A}}(n, m) = n+m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$und $+^{\mathcal{A}}(x, y) = \infty$, falls $\infty \in \{x, y\}$.

1. Welche dieser Modelle sind Standardmodelle?
2. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ initial in der Modellklasse von spec ist.
3. Zeigen Sie, dass es keinen sig-Homomorphismus von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{A}$ gibt.
4. Zeigen Sie, dass es keinen sig-Homomorphismus von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{A}$ gibt.
5. Bestimmen Sie eine möglichst kleine Konstruktormenge zu spec. Ist diese Konstruktormenge frei?

3. Aufgabe: Zeigen Sie, dass $\mathcal{I}$(spec) initial in Mod(spec) ist.

4. Aufgabe: Beweisen Sie Satz 2.2:
Es sei spec $= (\text{sig}, R)$ und R sei terminierend und grundkonfluent. Dann sind $\mathcal{I}$(spec) und $\mathcal{T}$(spec) isomorph.

Abgabe: bis 10. November 2003 im 4. Stock, Gebäude 34