Übungen zur Vorlesung

Reduktionssysteme

Prof. Dr. J. Avenhaus
Universität Kaiserslautern
SS 2003
Blatt 3 / 12. Mai 2003

Informationen zur Vorlesung:
`http://www-avenhaus.informatik.uni-kl.de/lehre/rds2003/rds2003.html`

1. Aufgabe:

1. Zeigen Sie Lemma 2.6 aus der Vorlesung:
   Seien $(M_1, \gtrsim_1)$ und $(M_2, \gtrsim_2)$ zwei Quasiordnungen. Dann ist auch $(M_1 \times M_2, \gtrsim)$ mit
   $$(u_1, u_2) \gtrsim (v_1, v_2) \text{ gdw } u_1 > v_1 \text{ oder } (u_1 \approx_1 v_1 \wedge u_2 \gtrsim_2 v_2)$$
   eine Quasiordnung. Genau dann ist $\gtrsim$ Noethersch, wenn $\gtrsim_1$ und $\gtrsim_2$ Noethersch sind.

2. Folgern Sie geschickt die Gültigkeit von Lemma 2.5.
   Hinweis: Betrachten Sie $M = M_1 = M_2$ und die „Diagonale“ $\{(u, u) \mid u \in M\} \subseteq M_1 \times M_1$ in 1.

2. Aufgabe:

1. Sei $>'$ auf $L = \{a, b, c, d, e, f\}$ definiert durch $a >' b >' c$ und $d >' e >' f$. Seien $A, B, C \in \mathrm{Mult}(L)$ gegeben durch
   $$A = \{a, b, b, d, d, f\}, B = \{a, b, c, c, c\} \text{ und } C = \{d, e, e, e, f\}.$$
   Sei $\gg'$ die Multimengenordnung zu $>'$ auf $\mathrm{Mult}(L)$. Wie stehen A, B und C bzgl. $\gg'$ in Relation?

Sei $>$ eine Partialordnung auf M, und sei $\gg$ die Multimengenordnung zu $>$ auf $\mathrm{Mult}(M)$. Zeigen Sie:

2. Aus $A \gg B$ folgt $A \cup C \gg B \cup C$ für alle $A, B, C \in \mathrm{Mult}(M)$.
   (Man sagt auch: $\gg$ ist stabil gegenüber der Hinzunahme gleicher Elemente.)

3. Genau dann ist $>$ total auf M, wenn $\gg$ total auf $\mathrm{Mult}(M)$ ist.

3. Aufgabe: Sei $\vdash\!\dashv \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gegeben durch

$$n \vdash\!\dashv m \text{ gdw } |n - m| = 4 \text{ oder } |n - m| = 6.$$

Geben Sie eine faire $\mathcal{B}$-Ableitung an, die $\vdash\!\dashv$ in eine konvergente Reduktionsrelation $\longrightarrow$ transformiert. Verwenden Sie beim Orientieren die natürliche Ordnung $>$ auf $\mathbb{N}$. Geben Sie auch $\vdash\!\dashv^{\infty}$ und $\longrightarrow^{\infty}$ an.

Abgabe: bis Donnerstag, 22. Mai 2003 im 4. Stock, Gebäude 34