5.3 Ein Konfluenztest für bedingte Regelsysteme

Voraussetzung: R ist terminierend.

Also: Es reicht lokale Konfluenz zu testen.

Es gibt 3 lokale Divergenzen

a) Nicht-Überlappungen (unkritisch).
b) Variablen-Überlappungen (i. Allg. kritisch; unkritisch, falls R verkleinernd ist).
c) echte Überlappungen (kritische Paare testen).

Überlappung

Sei $\left.\begin{array}{l} l \to r \Leftarrow u = v \\ l' \to r' \Leftarrow u' = v' \end{array}\right\}$ Variablen-disjunkt

Dies liefert

$$\begin{tikzcd} & \sigma(l) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \sigma(r) & & \sigma(l)[p \leftarrow \sigma(r')] \end{tikzcd}$$

falls
$\sigma(u) \downarrow \sigma(v)$
$\sigma(u') \downarrow \sigma(v')$
$\sigma = \text{mgu}(l', l/p)$

Kritische Paare

Definition 5.15

Seien $l \to r \Leftarrow u = v$ und $l' \to r' \Leftarrow u' = v'$ zwei Variablen-disjunkte Regeln, $p \in O(l)$, $l/p \notin V$, $\sigma = \text{mgu}(l/p, l')$. Dann ist

$$\sigma(l)[p \leftarrow \sigma(r')] = \sigma(r) \Leftarrow \sigma(u) = \sigma(v), \sigma(u') = \sigma(v')$$

ein **kritisches Paar** zu den beiden Regeln.

Sei $CP(R)$ die Menge aller kritischen Paare zu R.

Beachte

Ein kritisches Paar ist eine bedingte Gleichung $s = t \Leftarrow u = v$

Definition 5.16

Eine bedingte Gleichung $s = t \Leftarrow u = v$ heißt **zusammenführbar** in R, falls für jedes σ gilt

$$\sigma(u) \downarrow_R \sigma(v) \;\text{ impliziert }\; \sigma(s) \downarrow_R \sigma(t)$$

Beachte

Es gibt i. Allg. unendlich viele σ. Dies ist also ein unendlicher Test!

Beispiele zu kritischen Paaren

a) R: $f(x) \to x \Leftarrow x = a$
$\quad\quad f(b) \to b$

Das kritische Paar $b = b \Leftarrow b = a$ ist zusammenführbar.

b) R: $f(x) \to x \Leftarrow x = a$
$\quad\quad f(b) \to c$

Das kritische Paar ist $b = c \Leftarrow b = a$.
a, b sind irreduzibel, also gilt nicht $b \downarrow_R a$.
Also: Das kritische Paar **ist** zusammenführbar.

c) R: $f(x) \to x \Leftarrow x = a$
$\quad\quad f(a) \to c$

Das kritische Paar ist $a = c \Leftarrow a = a$.
Es gilt $a \downarrow_R a$, nicht $a \downarrow_R c$.
Also: Das kritische Paar ist **nicht** zusammenführbar.

Ein Konfluenzkriterium

Satz 5.6.

Sei R verkleinernd. Es ist R genau dann konfluent, wenn alle kritischen Paare zusammenführbar sind.

Beispiele

R: $f(x, x) \to x \Leftarrow g(x) = h(x)$
$\quad\quad a \to b$
$\quad\quad h(x) \to g(x) \Leftarrow x = a$

Es gilt $CP(R) = \emptyset$ und R ist verkleinernd.

Übung:

a) Zeige, dass R verkleinernd ist.

b) Zeige, dass

$$f(b, a) \leftarrow f(a, a) \to a$$

eine Variablenüberlappung ist und dass $f(b, a) \downarrow a$ gilt.

Beachte

Die Richtung „$\curvearrowright$“ im Satz 5.6 ist trivial.

Beweis zu Satz 5.6 (1)

Sei jedes kritische Paar zusammenführbar,

R verkleinernd bezüglich $\succ$,

$\longrightarrow \; = \; \longrightarrow_R \qquad$ (also $\longrightarrow \subseteq \succ$).

Setze

$P(t)$ gdw $\forall t_1, t_2$:
$$\begin{tikzcd} & t \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\ t_1 & & t_2 \end{tikzcd}$$
impliziert $t_1 \downarrow t_2$

Induktion nach $\succ$ zeigt, dass $P(t)$ für alle t gilt:

Sei t gegeben, $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2$

a) $t \equiv t_1$ oder $t \equiv t_2$: Es gilt $t_1 \downarrow t_2$.

b) Sonst: $t_1 \xleftarrow{*} s_1 \longleftarrow t \longrightarrow s_2 \xrightarrow{*} t_2$

Beweis zu Satz 5.6 (2)

Wir zeigen
$$\begin{tikzcd} & t \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ s_1 & & s_2 \end{tikzcd}$$
impliziert $s_1 \downarrow s_2 \qquad (*)$

dann gilt

$$\begin{tikzcd} & & t \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ & s_1 \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & & s_2 \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\ t_1 \arrow[dr, "*"'] & & \cdot \arrow[dl, "*"] & & t_2 \arrow[ddll, "*"] \\ & t_3 \arrow[dr, "*"'] & & & \\ & & t_4 & & \end{tikzcd}$$

t_3, t_4 ex.
nach Ind. Vor.

Also gilt $t_1 \downarrow t_2$.

Beweis zu Satz 5.6 (3)

Zu zeigen: $s_1 \longleftarrow t \longrightarrow s_2$ impliziert $s_1 \downarrow s_2$. $\quad (*)$

a) Dies ist eine Nicht-Überlappung: Es gilt $s_1 \longrightarrow \cdot \longleftarrow s_2$

b) Dies ist eine echte Überlappung: Es gilt $s_1 \downarrow s_2$, da $\langle s_1, s_2 \rangle$ durch ein kritisches Paar abgedeckt wird, dies ist zusammenführbar.

c) Dies ist eine Variablen-Überlappung: Sei

$$t \longrightarrow s_1 \text{ mit } l \to r \Leftarrow u = v, \sigma$$

$$t \longrightarrow s_2 \text{ mit } l' \to r' \Leftarrow u' = v', \sigma$$

$x \in \mathsf{Var}(l)$, $l/p \equiv x$, $\sigma(x)/q \equiv \sigma(l')$

Setze

$$\tau(y) \equiv \begin{cases} \sigma(x)[q \leftarrow \sigma(r')] & y \equiv x \\ \sigma(y) & y \not\equiv x \end{cases}$$

Beweis zu Satz 5.6 (4)

Dann

$$\begin{tikzcd}
 & \sigma(l) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\sigma(r) \arrow[d, "*"] & & \sigma(l)[pq \leftarrow \sigma(r')] \arrow[d, "*"] \\
\tau(r) & & \tau(l)
\end{tikzcd}$$

$\sigma(u) \downarrow \sigma(v)$
$\sigma(u') \downarrow \sigma(v')$

Wir zeigen $\quad \tau(u) \downarrow \tau(v)$

dann gilt $\tau(l) \longrightarrow \tau(r)$ mit der Regel $l \to r \Leftarrow u = v$,

also $\sigma(r) \downarrow \sigma(l)[pq \leftarrow \sigma(r')]$, also auch $s_1 \downarrow s_2$.

Beweis zu Satz 5.6 (5)

Zu zeigen: $\tau(u) \downarrow \tau(v)$.

Es gilt $\sigma(u) \downarrow \sigma(v)$. Wegen $l' \to r' \Leftarrow u' = v'$ und $\sigma(u') \downarrow \sigma(v')$ gilt $\sigma(y) \xrightarrow{*} \tau(y)$ für alle y.
Also gilt auch $\sigma(t') \xrightarrow{*} \tau(t')$ für alle Terme t'.

Also

$$\begin{tikzcd}
 & \sigma(u_i) \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & & \sigma(v_i) \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\
\tau(u_i) \arrow[dr, "*"] & & w_i \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & & \tau(v_i) \arrow[dl, "*"'] \\
 & w_i' \arrow[dr, "*"] & & w_i'' \arrow[dl, "*"'] & \\
 & & \hat{w}_i & &
\end{tikzcd}$$

Beachte: $\sigma(l) \succ \sigma(u_i), \sigma(v_i)$ und $t \succeq \sigma(l)$, da $t \geq_{TT} \sigma(l)$ und R verkleinernd bezüglich $\succ$ ist.

Es existieren w_i wegen $\sigma(u_i) \downarrow \sigma(v_i)$ und $w_i', w_i'', \hat{w}_i$ nach Ind. Voraussetzung.

Also gilt $\tau(u) \downarrow \tau(v)$.

Bemerkung zu Variablen-Überlappungen

Beispiel

R: (1) $a \to b$
(2) $f(a,b) \to f(b,a)$
(3) $f(a,a) \to b$
(4) $f(b,x) \to b \Leftarrow f(x,x) = b$

Es gilt (Übung)

R ist nicht verkleinernd, aber terminierend.
Alle kritischen Paare sind zusammenführbar.

Betrachte die Variablenüberlappung

$$\begin{tikzcd}
 & f(b,a) \arrow[dl, "(1)"'] \arrow[dr, "(4)"] & \\
f(b,b) & & b
\end{tikzcd}$$

Es gilt nicht $f(b,b) \downarrow b$, also ist R nicht konfluent.

Also

Variablenüberlappungen sind i. Allg. nicht unkritisch, selbst für terminierende R. Sie sind unkritisch für verkleinernde R.

Zur Entscheidbarkeit der Konfluenz

Beachte

1. Für terminierende unbedingte Regelsysteme ist die Konfluenz entscheidbar.
2. Für bedingte Regelsysteme und bedingte Gleichungen ist „zusammenführbar“ ein unendlicher Test:
   $s = t \Leftarrow u = v$ ist zusammenführbar gdw
   für alle $\sigma : \sigma(u) \downarrow \sigma(v)$ impliziert $\sigma(s) \downarrow \sigma(t)$.

Frage

Ist für verkleinernde Regelsysteme die (lokale) Konfluenz entscheidbar?

Satz 5.7.

Das folgende Problem ist unentscheidbar.

Eingabe:	R endlich, simplifizierend.
Frage:	Ist R konfluent?

Beweis zu Satz 5.7

Wir reduzieren das PCP auf dieses Problem. Konstruktion analog zum Beweis zu Satz 5.4.

Sei $A = (u_1, \ldots, u_n)$
$B = (v_1, \ldots, v_n)$ $\qquad u_i, v_i \in \Sigma^*$

Setze

$R = R_{A,B}$

R:

$$
\begin{array}{lll}
f(\mathsf{nil}) & \to e & \\
g(\mathsf{nil}) & \to e & \\
f(i.l) & \to \bar{u}_i(f(l)) & i = 1, \ldots, n \\
g(i.l) & \to \bar{v}_i(g(l)) & i = 1, \ldots, n \\
\mathsf{eq}(x, x) & \to \mathsf{true} & \\
h(i.l) & \to \mathsf{false} & i = 1, \ldots, n \\
h(l) & \to \mathsf{true} \Leftarrow \mathsf{eq}(f(l), g(l)) = \mathsf{true} &
\end{array}
$$

Beweis zu Satz 5.7 (Forts.)

Sei $\succ$ die RPO zur Präzedenz $(a \in \Sigma, 1 \leq i \leq n)$

$h >_F f, g >_F \mathsf{eq} >_F . >_F \mathsf{nil} >_F i >_F \bar{a} >_F e >_F \mathsf{true} >_F \mathsf{false}$

Dann

R ist simplifizierend bezüglich $\succ$.

Es gibt genau n kritische Paare

$$\mathsf{true} = \mathsf{false} \Leftarrow \mathsf{eq}(f(i.l), g(i.l)) = \mathsf{true}$$

Es gilt

$R_{A,B}$ ist konfluent

gdw $\mathsf{eq}(f(i.l), g(i.l)) \downarrow \mathsf{true}$ ist unerfüllbar für alle $1 \leq i \leq n$,

gdw (A, B) hat keine Lösung,

gdw $\neg\, \mathsf{PCP}(A, B)$.

Also ist das Konfluenzproblem für simplifizierende R unentscheidbar.

Hilfsmittel für den Konfluenztest

Beachte

Die Zusammenführbarkeit ist unentscheidbar. Der Nachweis der Zusammenführbarkeit ist auch in fast allen Anwendungen schwer.

Beispiel „Einfügen in sortierte Liste"

R: $\mathsf{ins}(x, \mathsf{nil}) \to x.\mathsf{nil}$
$\mathsf{ins}(x, y.l) \to x.y.l \Leftarrow x \leq y = \mathsf{true}$
$\mathsf{ins}(x, y.l) \to y.\mathsf{ins}(x, l) \Leftarrow x \leq y = \mathsf{false}$

$\mathsf{CP}(R)$ besteht nur aus
$x.y.l = y.\mathsf{ins}(x, l) \Leftarrow x \leq y = \mathsf{true}, x \leq y = \mathsf{false}$

Idee: Das kritische Paar ist zusammenführbar, weil der Kontext (die Bedingung) unerfüllbar ist.

Wie zeigt man dies?

Ansatz

1. Kontext ausnutzen: $s = t \Leftarrow u = v$
   „Skolemisieren": $\bar{s} = \bar{t} \Leftarrow \bar{u} = \bar{v}$
   (Variablen sind Konstanten) zeige: $\bar{u} \downarrow \bar{v}$ impliziert $\bar{s} \downarrow \bar{t}$.
2. Konzept „Konfluenz unterhalb" als Beweistechnik benutzen.

Konfluenz unterhalb

Definition 5.17

Sei $\longrightarrow \subseteq \succ$, $\succ$ eine Noethersche Partialordnung.

a) $\longrightarrow$ heißt **konfluent unterhalb** t, falls

$$\forall t_1, t_2, t_3 : (t \succ t_1 \wedge t_2 \xleftarrow{*} t_1 \xrightarrow{*} t_3) \text{ impliziert } t_2 \downarrow t_3$$

b) $\longrightarrow$ heißt **CR unterhalb** t, falls

$$\forall t_1, \ldots, t_n : (t \succ t_1, \ldots, t_n \wedge t_1 \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow t_n) \text{ impliziert } t_1 \downarrow t_n$$

Lemma 5.4

$\longrightarrow$ ist konfluent unterhalb t gdw $\longrightarrow$ ist CR unterhalb t.

Beachte

Der Induktionsbeweis zu Satz 5.6 benutzt „$\longrightarrow$ ist konfluent unterhalb t“ als Ind. Voraussetzung zum Beweis von $P(t)$:
$P(t)$ gdw $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2$ impliziert $t_1 \downarrow t_2$.

Skolemisierung

Definition 5.18

Sei t ein Term,

zu jedem $x \in V$ sei $\bar{x}$ eine neue Konstante,
sei $\sigma = \{x \leftarrow \bar{x} \mid x \in \mathsf{Var}(t)\}$.

Dann heißt $\bar{t} \equiv \sigma(t)$ die Skolemisierung von t.

Analog: Sei

$\sigma = \{x \leftarrow \bar{x} \mid x \in \mathsf{Var}(s = t \Leftarrow u = v)\}$

$\bar{s} \equiv \sigma(s),\ \bar{t} \equiv \sigma(t),\ \bar{u} \equiv \sigma(u),\ \bar{v} \equiv \sigma(v)$

Dann heißt $\bar{s} = \bar{t} \Leftarrow \bar{u} = \bar{v}$ die Skolemisierung von $s = t \Leftarrow u = v$.

Beachte

Dies formalisiert „Sei x beliebig aber fest“.

Termersetzung im Kontext $u = v$

Definition 5.19

a) Ein **Kontext** $u = v$ ist ein Gleichungssystem $u_i = v_i$, $i = 1, \ldots, n$.

b) Sei R ein Regelsystem und $\bar{u} = \bar{v}$ eine Skolemisierung von $u = v$. Dann ist $R_{u=v}$

$$R_{u=v} = R \cup \{\bar{u}_i \to \bar{v}_i, \bar{v}_i \to \bar{u}_i \mid i = 1, \ldots, n\}$$

das System R **im Kontext** $u = v$.

c) Sei $\succ$ eine Reduktionsordnung und $\longrightarrow \, = \, \longrightarrow_{R_{u=v}}$.
t' und t'' heißen in R **im Kontext** $u = v$ **unterhalb** t **verbunden**, falls es $t_1, \ldots, t_m$ gibt mit $t' \equiv t_1, t'' \equiv t_m, t_{i-1} \longleftrightarrow t_i$ und $t \succ t_i$.

Beachte

a) Reduzieren mit $\longrightarrow_{R_{u=v}}$ heißt „contextual rewriting“.

b) Für die Zusammenführbarkeit von $s = t \Leftarrow u = v$ reicht es, $s \downarrow t$ im Kontext $u = v$ zu zeigen.

c) Sind t' und t'' im Kontext $u = v$ unterhalb t verbunden und gilt $\sigma(u) \downarrow \sigma(v)$, so sind $\sigma(t')$ und $\sigma(t'')$ im leeren Kontext unterhalb $\sigma(t)$ verbunden.

Verschärfter Konfluenztest (1)

Sei R verkleinernd bezüglich $\succ$.

Definition 5.20

Sei $t_1 = t_2 \Leftarrow u = v$ das kritische Paar zu den Regeln $l_i \to r_i \Leftarrow u^{(i)} = v^{(i)}$ für $i = 1, 2$ mit $p \in O(l_1)$ und $\sigma = \text{mgu}(l_1/p, l_2)$. Sei $t \equiv \sigma(l_1)$.

a) Es heißt **Kontext-verbunden unterhalb**, falls t_1 und t_2 in R im Kontext $u = v$ unterhalb t verbunden sind.

b) Es heißt **Kontext-unerfüllbar**, falls es irreduzible Konstanten $c_1 \not\equiv c_2$ gibt, so dass c_1 und c_2 in R im Kontext $u = v$ unterhalb t verbunden sind.

Beachte

Sei R konfluent unterhalb t und sei $\sigma(u) \downarrow \sigma(v)$. Im Fall a) sind $\sigma(t_1)$ und $\sigma(t_2)$ im leeren Kontex in R unterhalb $\sigma(t)$ verbunden, also gilt $\sigma(t_1) \downarrow \sigma(t_2)$. Im Fall b) gilt analog $c_1 \equiv \sigma(c_1) \downarrow \sigma(c_2) \equiv c_2$. Da c_1 und c_2 beide irreduzibel sind, ist das unmöglich. Also gibt es kein σ mit $\sigma(u) \downarrow \sigma(v)$.

Verschärfter Konfluenztest (2)

Satz 5.8.

Sei R verkleinernd bezüglich $\succ$. Ist jedes kritische Paar entweder Kontext-verbunden unterhalb oder Kontext-unerfüllbar, so ist R konfluent.

Beweis: Analog wie zum Beweis zu Satz 5.5.

Induktion nach $\succ$ zeigt für alle t: R ist konfluent unterhalb t.

(Dazu wird das letzte „Beachte" verwendet.)

Also ist R konfluent.

Beispiel

Sei R ein Regelsystem. Sei

$f(g(x)) = f(h(x)) \Leftarrow g(x) = a, h(x) = b$
ein kritisches Paar und es gelte $a \downarrow_R b$

Dann gilt im Kontext $g(x) = a, h(x) = b$

$f(g(\bar{x})) \to f(a) \downarrow f(b) \leftarrow f(h(\bar{x}))$.

Also ist das kritische Paar verbunden unterhalb.

Beispiel

Sei

R: (1) $x \leq x \to$ true
(2) $s(x) \leq x \to$ false
(3) $s(x) \leq s(y) \to$ true $\Leftarrow x \leq y =$ true
(4) $s(x) \leq s(y) \to$ false $\Leftarrow x \leq y =$ false

$\succ$ die RPO zu $\leq\ >_F$ true, false.

Dann ist R verkleinernd bezüglich $\succ$. true und false sind irreduzibel.

Die kritischen Paare der Form $t = t \Leftarrow u = v$ sind stets zusammenführbar.

Das kritische Paar zu (2) und (3) ist

true $=$ false $\Leftarrow s(x) \leq x =$ true $\qquad t \equiv s^2(x) \leq s(x)$

Im Kontext $s(x) \leq x =$ true gilt false $\leftarrow s(x) \leq x \to$ true, also ist das kritische Paar Kontext-unerfüllbar.

Die kritischen Paare zu (1), (4) bzw. (3), (4) sind

true $=$ false $\Leftarrow x \leq x =$ false $\qquad t \equiv s(x) \leq s(x)$

true $=$ false $\Leftarrow x \leq y =$ true, $x \leq y =$ false $\qquad t \equiv s(x) \leq s(x)$

Beide sind Kontext-unerfüllbar.

Also ist R konfluent.

Konfluenz bei Termination

Frage Wann ist ein terminierendes R konfluent?

Definition 5.21

Sei R ein Regelsystem.

Ein kritisches Paar zu $l \to r \Leftarrow u = v$ und $l' \to r' \Leftarrow u' = v'$ bei $p = \lambda$ (Überlappung auf top-level) heißt eine **Überlagerung**.

Satz 5.9.

Sei R terminierend und alle kritischen Paare seien zusammenführbare Überlagerungen. Dann ist R konfluent.

Ohne Beweis.

Beachte

a) Satz 5.9 verlangt nicht „R ist verkleinernd".

b) Satz 5.9 gilt speziell für CP$(R) = \varnothing$.

Beispiel zur Konfluenz bei Termination

Sei

$$
\begin{aligned}
R\colon\ & d \to b \\
& d \to c \\
& f(x) \to a \Leftarrow x = b, x = c \\
& b \to c \Leftarrow f(d) = a
\end{aligned}
$$

Dann

R ist terminierend, nicht verkleinernd (Übung).

Es gilt $f(d) \to a$ und $b \to c$ in R.

Es gibt nur ein kritisches Paar: $b = c \Leftarrow$.

Es ist eine zusammenführbare Überlagerung.

Also

R ist konfluent.

Konfluenz ohne Termination

Sei R ein bedingtes Regelsystem.

Dann ist $R_u = \{l \to r \mid l \to r \Leftarrow u = v \text{ in } R\}$.

Definition 5.22

R heißt **normal**, falls für jede Regel $l \to r \Leftarrow u = v$ gilt:
Jedes v_i ist ein Grundterm und R_u-irreduzibel.

R heißt **nicht-überlappend**, falls $\mathsf{CP}(R) = \varnothing$.

R heißt **orthogonal**, falls R links-linear, normal und nicht-überlappend ist.

Satz 5.10.

Jedes orthogonale R ist konfluent.

Ohne Beweis.

Bemerkungen

a) Statt $\mathsf{CP}(R) = \varnothing$ reicht die Voraussetzung: Für jedes
$s = t \Leftarrow u = v$ in $\mathsf{CP}(R)$ gilt:
$s \equiv t$ oder $\sigma(u) \downarrow \sigma(v)$ für kein σ.

b) Jedes unbedingte R ist normal.

Bemerkungen zu Satz 5.10

Bemerkung

Satz 5.10 gilt nicht, wenn R nicht links-linear oder nicht normal ist.

Beispiel 1

$$\begin{aligned} R: \quad & f(x,x) \to a \\ & f(x,s(x)) \to b \\ & a \to s(a) \end{aligned}$$

R ist normal und nicht-überlappend, aber nicht links-linear und nicht konfluent.

Beispiel 2

$$\begin{aligned} R: \quad & b \to f(b) \\ & f(x) \to a \Leftarrow f(x) = x \end{aligned}$$

R ist links-linear und nicht-überlappend, aber nicht normal und nicht konfluent:

Es gilt $f(b) \longrightarrow_R a$ wegen $f(b) \downarrow b$ und
$a \;{}_R\!\longleftarrow f(f(b)) \longrightarrow_R f(a)$ mit $a, f(a)$ irreduzibel.

eq-Prädikate (1)

Ziel

Transformation von R in ein normales Regelsystem R'.

Beachte

Ist R normal, so ist $\longrightarrow_{R^j} = \longrightarrow_{R^o}$

„Test durch Zusammenführbarkeit = Test durch Rewriting".

Bezeichnung

Sei R ein Regelsystem über sig. Sei sig' die Signatur, die entsteht durch Hinzunahme der neuen Sorte BOOL' und von

$$\left.\begin{array}{ll} \mathsf{eq}_s : s, s \to \mathsf{BOOL}' & s \in S \\ \mathsf{true}' : \to \mathsf{BOOL}' & \end{array}\right\} \text{neue Operatoren}$$

$$\mathsf{eq}_s(x, x) \to \mathsf{true}' \qquad \text{neue Regeln}$$

Zu $u = v$ sei $\mathsf{eq}(u, v) = \mathsf{true}'$ eine Abkürzung von $\mathsf{eq}_{s_1}(u_1, v_1) = \mathsf{true}', \cdots, \mathsf{eq}_{s_n}(u_n, v_n) = \mathsf{true}'$.

Sei

$R' = \{l \to r \Leftarrow \mathsf{eq}(u, v) = \mathsf{true} \mid l \to r \Leftarrow u = v \text{ in } R\}$.

Dann heißt R' die **eq-Transformation** von R.

eq-Prädikate (2)

Lemma 5.5

Sei R' die eq-Transformation von R,
R_k und R'_k die k-te Approximation von R, R'.

a) Es gilt auf $\mathsf{Term}(F, V)$

$s \longrightarrow_{R_k} t$ gdw $s \longrightarrow_{R'_k} t$

$s \longrightarrow_R t$ gdw $s \longrightarrow_{R'} t$

$s \downarrow_R t$ gdw $\mathsf{eq}(s, t) \xrightarrow{*}_R \mathsf{true}'$

b) Es ist R terminierend (konfluent, lokal konfluent) gdw R' ist terminierend (konfluent, lokal konfluent).

c) Es ist $\mathsf{CP}(R) = \mathsf{CP}(R')$.

d) Es ist R' normal, aber nicht links-linear.

Diese Transformation hilft manchmal bei Beweisen zu Aussagen über R.

eq-Prädikate (3)

Mit eq-Prädikaten lassen sich negative Bedingungen kodieren.

Dazu muss eq_s „total definiert“ sein.

Beispiele

a) Definition von $\mathsf{eq} \equiv \mathsf{eq}_{\mathsf{NAT}}$

$$\begin{array}{lll} R: & \mathsf{eq}(x,x) & \to \mathsf{true} \\ & \mathsf{eq}(s(x),0) & \to \mathsf{false} \\ & \mathsf{eq}(0,s(y)) & \to \mathsf{false} \\ & \mathsf{eq}(s(x),s(y)) & \to \mathsf{eq}(x,y) \end{array}$$

b) Definition von $\mathsf{eq} = \mathsf{eq}_{\mathsf{LIST}}$ LIST=Liste über s.

$$\begin{array}{lll} R: & \mathsf{eq}(l,l) & \to \mathsf{true} \\ & \mathsf{eq}(x.l_1,\mathsf{nil}) & \to \mathsf{false} \\ & \mathsf{eq}(\mathsf{nil},y.l_2) & \to \mathsf{false} \\ & \mathsf{eq}(x.l_1,x.l_2) & \to \mathsf{eq}(l_1,l_2) \\ & \mathsf{eq}(x.l_1,y.l_2) & \to \mathsf{false} \Leftarrow \mathsf{eq}_s(x,y) = \mathsf{false} \end{array}$$

c) Definition von $\mathsf{elm}(x,l) \mathrel{\hat{=}} x$ kommt in l vor.

$$\begin{array}{lll} R: & \mathsf{elm}(x,\mathsf{nil}) & \to \mathsf{false} \\ & \mathsf{elm}(x,x.l) & \to \mathsf{true} \\ & \mathsf{elm}(x,y.l) & \to \mathsf{elm}(x,l) \Leftarrow \mathsf{eq}_s(x,y) = \mathsf{false} \end{array}$$

Übung: Diese R sind simplifizierend und konfluent.