3.7.3 Syntaktische Reduktionsordnungen

Ziel

Syntaktische Termordnungen

- gesteuert durch Präzedenz $\gtrsim_F$ auf F,
- rekursiv definiert,
- Vergleich der Argumente
  a) als Multimengen: RPO
  b) lexikographisch: LPO

RPO: rekursive Pfadordnung.

LPO: lexikographische Pfadordnung.

Erinnerung

Sei sig $= (S, F, \tau)$, $\quad \|S\| = 1$
$\succeq$ Partialordnung auf Term(F, V).

Definition 3.36

- $\succ$ ist **Simplifikationsordnung**, falls
  a) $s \succ t \rightsquigarrow f(\cdots, s, \cdots) \succ f(\cdots, t, \cdots)$
  b) $f(\cdots, s_i, \cdots) \succ s_i$
  c) $f(\cdots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \cdots) \succ f(\cdots, t_{i-1}, t_{i+1}, \cdots)$
- $\succ$ ist **Reduktionsordnung**, falls
  i) $\succ$ ist Noethersch.
  ii) $s \succ t \rightsquigarrow f(\cdots, s, \cdots) \succ f(\cdots, t, \cdots)$
  iii) $s \succ t \rightsquigarrow \sigma(s) \succ \sigma(t)$

Satz 3.20.

Jede Simplifikationsordnung ist noethersch.

Jede Simplifikationsordnung mit (iii) ist eine Reduktionsordnung.

Beachte

Sei $\succ$ eine Reduktionsordnung mit $R \subseteq \succ$.

Dann ist $\longrightarrow_R$ terminierend.

Präzedenzen

Definition 3.37

Eine **Präzedenz** ist eine Quasiordnung $\gtrsim_F$ auf F.

Sei $\approx_F = \gtrsim_F \cap \lesssim_F$.

Definition 3.38

Die **Permutationskongruenz** $\sim_{\mathsf{perm}}$ zu $\approx_F$ ist die kleinste Kongruenz $\sim$ mit

$$s \equiv f(s_1, \ldots, s_n) \sim t \equiv g(t_1, \ldots, t_m)$$

falls $f \approx_F g$, $n = m$ und für eine Permutation π auf $\{1, \ldots, n\}$ gilt:

$t_i \sim s_{\pi(i)}$ für $i = 1, \ldots, n$.

Bezeichnung

Sei $\succsim$ eine Quasiordnung auf Term(F).

Seien $\succ$ und $\sim$ der strikte Anteil und die Äquivalenzrelation zu $\succsim$.

Dann ist $\underset{\sim}{\succ\!\!\succ}$ auf Mult(Term(F)) definiert durch

$A \underset{\sim}{\succ\!\!\succ} B$ gdw

$$A = X \cup \{a_1, \ldots, a_n\} \quad B = Y \cup \{b_1, \ldots, b_n\}$$

$$a_i \sim b_i,\ i = 1, \ldots, n$$

$$X \succ\!\!\succ Y$$

RPO: Definition

Definition 3.39 Die rekursive Pfadordnung

Sei $\gtrsim_F$ eine Präzedenz auf F.

$\sim \; = \; \sim_{\mathsf{perm}}$

Die RPO $\succsim_{\mathsf{rpo}} = \succ_{\mathsf{rpo}} \cup \sim$ ist definiert durch

$$s \equiv f(s_1, \ldots, s_n) \succ_{\mathsf{rpo}} t \equiv g(t_1, \ldots, t_m)$$

$$\begin{array}{lll} \text{gdw} & s_i \succsim_{\mathsf{rpo}} t \text{ für ein } i \text{ oder} & (\alpha) \\ & f >_F g \wedge s \succ_{\mathsf{rpo}} t_j \text{ für alle } j \text{ oder} & (\beta) \\ & f \approx_F g \wedge \{s_1, \ldots, s_n\} \succ\!\!\succsim_{\mathsf{rpo}} \{t_1, \ldots, t_m\} & (\gamma) \end{array}$$

Beachte

1. $\succsim_{\mathsf{rpo}}$ ist definiert auf Term(F).
2. $a >_F b \;\rightsquigarrow\; a \succ_{\mathsf{rpo}} b$ nach (β).
3. $f(s_1, \ldots, s_n) \succ_{\mathsf{rpo}} s_i$ nach (α).
   Also hat $\succ_{\mathsf{rpo}}$ die Teiltermeigenschaft.
4. Eine spezielle RPO ist festgelegt durch die Präzedenz $\gtrsim_F$.
   $\gtrsim_F =$ id ist möglich.
   Häufig: $>_F$ angegeben, dann $\gtrsim_F \; = \; \geq_F$
5. Frage: Ist $\succ_{\mathsf{rpo}}$ eine Partialordnung?

Die RPO: Ergebnis

Satz 3.21.

Jede RPO $\succ_{\mathsf{rpo}}$ ist eine Simplifikationsordnung.
Es gilt $\succsim_{\mathsf{rpo}} = \succ_{\mathsf{rpo}} \cup \sim_{\mathsf{perm}}$ und $\succsim_{\mathsf{rpo}}$ ist Quasiordnung.

Beweis-Skizze

Sei $\succsim \; = \; \succsim_{\mathsf{rpo}}$.

a) Transitivität von $\succ$: Es gilt

$$\left.\begin{array}{lll} s \succ t \succsim u & \rightsquigarrow & s \succ u \\ s \succsim t \succ u & \rightsquigarrow & s \succ u \end{array}\right\} \text{Induktion nach } |s| + |t| + |u|$$

b) Irreflexivität von $\succ$: $t \not\succ t$. Dies ist leicht.
c) Teiltermeigenschaft von $\succ$: Folgt aus (α).
d) Verträglichkeit mit Termstruktur: Folgt aus (γ).
e) Löscheigenschaft: Folgt aus (γ).

Beachte

Jede RPO $\succ_{\mathsf{rpo}}$ enthält die homöomorphe Einbettung $\rhd$, d. h.,
$\rhd \subseteq \succ_{\mathsf{rpo}}$, also $l \rhd r \rightsquigarrow l \succ_{\mathsf{rpo}} r$.

Die RPO: Ein Beispiel

Sei sig $= (S, F, \tau)$ mit $F = \{-, +, \cdot, 0, 1\}$

$$
\begin{array}{llll}
R: & -(-x) & \rightarrow x & (1) \\
 & -(x+y) & \rightarrow (-x) + (-y) & (2) \\
 & -(x \cdot y) & \rightarrow (-x) \cdot y & (3) \\
 & x \cdot (y+z) & \rightarrow (x \cdot y) + (x \cdot z) & (4) \\
 & (x+y) \cdot z & \rightarrow (x \cdot z) + (y \cdot z) & (5)
\end{array}
$$

Ziel

$\sigma(l) \succ_{\mathsf{rpo}} \sigma(r)$ für alle $l \rightarrow r$ in R, σ Grundsubstitution.

Sei $\sigma(x) \equiv \bar{x},\ \sigma(y) \equiv \bar{y},\ \sigma(z) \equiv \bar{z},\ \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathsf{Term}(F)$.

Sei $\bar{t} \equiv \sigma(t)$.

Wähle

Präzedenz $>_F$: $\quad - >_F \cdot >_F +$

zu (1): $\bar{l} \rhd \bar{r} \quad \rightsquigarrow \bar{l} \succ_{\mathsf{rpo}} \bar{r}$.

zu (2): zu zeigen nach (β): $-(\bar{x} + \bar{y}) \succ_{\mathsf{rpo}} -\bar{x}, -\bar{y}$.
Dies gilt, sogar mit $\rhd$ statt $\succ_{\mathsf{rpo}}$.

zu (4) zu zeigen nach (β) : $\bar{x} \cdot (\bar{y} + \bar{z}) \succ_{\mathsf{rpo}} \bar{x} \cdot \bar{y}$, $\bar{x} \cdot \bar{z}$. Dies gilt, sogar mit $\rhd$ statt $\succ_{\mathsf{rpo}}$.

Beispiel: even/odd

Sei

$$
\begin{array}{lll}
R: & \mathsf{even}(0) \rightarrow \mathsf{true} & \mathsf{even}(s^2(x)) \rightarrow \mathsf{not}(\mathsf{odd}(x)) \\
 & \mathsf{odd}(0) \rightarrow \mathsf{false} & \mathsf{odd}(s^2(x)) \rightarrow \mathsf{not}(\mathsf{even}(x)) \\
 & \mathsf{even}(s(0)) \rightarrow \mathsf{false} & \mathsf{not}(\mathsf{false}) \rightarrow \mathsf{true} \\
 & \mathsf{odd}(s(0)) \rightarrow \mathsf{true} & \mathsf{not}(\mathsf{true}) \rightarrow \mathsf{false}
\end{array}
$$

1. Lösung

Wähle Präzedenz even $\approx_F$ odd $>_F$ not $>_F$ true, false.

Es gilt $\sigma(l) \succ_{\mathsf{rpo}} \sigma(r)$ für alle $l \rightarrow r$ in R, σ Grundsubstitution.

2. Lösung

Wähle Präzedenz $s >_F$ even, odd, not $>_F$ true, false.

Es gilt $\sigma(l) \succ_{\mathsf{rpo}} \sigma(r)$ für alle $l \rightarrow r$ in R, σ Grundsubstitution.

Die RPO auf Term(F, V)

Definition 3.40

Sei $\gtrsim_F$ Präzedenz auf F.

Erweitere frühere Definition von $\succ_{\mathsf{rpo}}$:

$s \equiv f(s_1, \ldots, s_n) \succ_{\mathsf{rpo}} t \equiv g(t_1, \ldots, t_m)$
gdw (α) oder (β) oder (γ).

$s \equiv f(s_1, \ldots, s_n) \succ_{\mathsf{rpo}} x$
gdw $x \in \mathsf{Var}(s)$, $s \not\equiv x$ $\quad (\delta)$

Satz 3.22.

Jede RPO ist eine Simplifikationsordnung, die mit Substitutionen verträglich ist.

Sie ist also eine Reduktionsordnung.

Beweis: Übung.

Beispiel: flatten

Sei

$$
\begin{array}{lll}
R: & \mathsf{flat}(\mathsf{tnil}) \to \mathsf{nil} & (1) \\
 & \mathsf{flat}(\mathsf{tr}(t_1, x, t_2)) \to \mathsf{app}(\mathsf{flat}(t_1), x.\mathsf{flat}(t_2)) & (2) \\
 & \mathsf{app}(\mathsf{nil}, l_2) \to l_2 & (3) \\
 & \mathsf{app}(x.l_1, l_2) \to x.\mathsf{app}(l_1, l_2) & (4)
\end{array}
$$

Wähle

Präzedenz $>_F$:

flat $>_F$ nil	für die 1. Regel
flat $>_F$ app $>_F$.	für die 2. und 4. Regel

Es gilt

(1) $\mathsf{flat}(\mathsf{tnil}) \succ \mathsf{nil}$ nach (β),

(2) $\mathsf{flat}(\mathsf{tr}(t_1, x, t_2)) \succ \mathsf{app}(\mathsf{flat}(t_1), x.\mathsf{flat}(t_2))$ nach (β), denn

- $\mathsf{flat}(\mathsf{tr}(t_1, x, t_2)) \succ \mathsf{flat}(t_1)$ mit $\trianglerighteq$,
- $\mathsf{flat}(\mathsf{tr}(t_1, x, t_2)) \succ x.\mathsf{flat}(t_2)$ nach (β), denn
  - $\mathsf{flat}(\mathsf{tr}(t_1, x, t_2)) \succ x$ mit $\trianglerighteq$,
  - $\mathsf{flat}(\mathsf{tr}(t_1, x, t_2)) \succ \mathsf{flat}(t_2)$ mit $\trianglerighteq$.

(3) $\mathsf{app}(\mathsf{nil}, l_2) \succ l_2$ mit $\trianglerighteq$,

(4) $\mathsf{app}(x.l_1, l_2) \succ x.\mathsf{app}(l_1, l_2)$ nach (β), denn

$\mathsf{app}(x.l_1, l_2) \succ x, \mathsf{app}(l_1, l_2)$ mit $\trianglerighteq$.

Die LPO: Vorbereitung

Idee

Vergleich der Argumente als Folgen (statt als Multimengen wie bei der RPO).

Definition 3.41

Sei $\succsim$ eine Quasiordnung auf M.

Seien $\succ$ und $\sim$ der strikte Anteil und die Äquivalenzrelation zu $\succsim$.

Setze $\succ^*$ Partialordnung auf M^* (Folgen über M)

- $u \succ^* \lambda \qquad u \in M^*, u \not\equiv \lambda$
- $mu \succ^* m'v$ gdw $m \succ m'$ oder $m \sim m' \wedge u \succ^* v$.

Dann ist $\succ^*$ die **Lexikographische Erweiterung** von $\succsim$.

Die LPO zur Präzedenz $\gtrsim_F$ auf F benutzt die Kongruenz

$f(s_1, \ldots, s_n) \sim g(t_1, \ldots, t_m)$
gdw $n = m, f \approx_F g, s_i \sim t_i, i = 1, \ldots, n$

Die LPO: Definition

Voraussetzung: Jedes $f \in F$ hat feste Stelligkeit.

Definition 3.42 Die lexikographische Pfadordnung

Sei $\gtrsim_F$ Präzedenz auf F.

Die LPO $\succsim_{\mathsf{lpo}}$ zu $\gtrsim_F$ ist definiert durch

$$
\begin{array}{lll}
s \equiv f(s_1, \ldots, s_n) \succ_{\mathsf{lpo}} t \equiv g(t_1, \ldots, t_m) & & \\
\text{gdw} \quad s_i \succsim_{\mathsf{lpo}} t \text{ für ein } i \text{ oder} & & (\alpha) \\
\qquad f >_F g \wedge s \succ_{\mathsf{lpo}} t_j \text{ für alle } j \text{ oder} & & (\beta) \\
\qquad f \approx_F g \wedge s_1, \ldots, s_n \succ_{\mathsf{lpo}}^* t_1, \ldots, t_m & & (\gamma) \\
\qquad\qquad \wedge\ s \succ_{\mathsf{lpo}} t_j \text{ für alle } j & &
\end{array}
$$

$$s \succ_{\mathsf{lpo}} x \text{ gdw } x \in \mathsf{Var}(s), x \not\equiv s \qquad (\delta)$$

Die LPO: Ergebnisse

Satz 3.23.

Jede LPO ist eine Simplifikationsordnung auf Term(F, V), die mit Substitutionen verträglich ist.

Sie ist eine Reduktionsordnung.

Beweis: Übung, siehe Beweis für die RPO.

Beachte

Eine spezielle LPO ist festgelegt durch die Präzedenz $\gtrsim_F$.

Jede LPO $\succ_{\mathsf{lpo}}$ enthält die homöomorphe Einbettung $\rhd$,
d. h., $l \rhd r$ impliziert $l \succ_{\mathsf{lpo}} r$.

Die LPO: Beispiel Addition

Sei

R: $x + 0 \to x$ (1)
$x + s(y) \to s(x + y)$ (2)
$(x + y) + z \to x + (y + z)$ (3)

Wahl der Präzedenz $\gtrsim_F$: Setze $+ >_F s$

(1) $x + 0 \rhd x$ Also $x + 0 \succ_{\mathsf{lpo}} x$.

(2) Nach (β) reicht zu zeigen $x + s(y) \succ x + y$.
Dies gilt wegen $x + s(y) \rhd x + y$.

(3) Nach (γ) reicht zu zeigen:
$x + y, z \succ_{\mathsf{lpo}}^* x, y + z$ (a)
$(x + y) + z \succ_{\mathsf{lpo}} x, y + z$ (b)

(a): Es gilt $x + y \succ_{\mathsf{lpo}} x$ wegen (δ).
(b): Dies gilt schon mit $\rhd$.

Die LPO: Die Ackermann-Funktion

Sei

R: $a(0, y) \to s(y)$ (1)
$a(s(x), 0) \to a(x, s(0))$ (2)
$a(s(x), s(y)) \to a(x, a(s(x), y))$ (3)

Wahl der Präzedenz: $a >_F s$

(1) Nach (β) reicht zu zeigen $a(0, y) \succ y$.
Dies gilt nach (δ).

(2) Nach (γ) reicht zu zeigen
(a) $s(x), 0 \succ^*_{\mathsf{lpo}} x, s(0)$ und
(b) $a(s(x), 0) \succ_{\mathsf{lpo}} x, s(0)$.
Dies ist leicht.

(3) Nach (γ) reicht zu zeigen
$s(x), s(y) \succ^*_{\mathsf{lpo}} x, a(s(x), y)$ (a)
$a(s(x), s(y)) \succ_{\mathsf{lpo}} x, a(s(x), y)$ (b)

(a) Es gilt $s(x) \succ_{\mathsf{lpo}} x$ nach (δ).
(b) Dies gilt schon mit $\rhd$ statt $\succ_{\mathsf{lpo}}$.

Beachte

Dies zeigt die Mächtigkeit der LPO: Die Länge der Ableitungsketten ab $t_{n,m} \equiv a(s^n(0), s^m(0))$ ist durch keine primitiv-rekursive Funktion $f(n, m)$ beschränkt!

Die LPO: Gegenbeispiele

a) f habe **variable Stelligkeit**:
Präzedenz: $b >_F a$

$$f(b) \succ_{\mathsf{lpo}} f(a, b) \succ_{\mathsf{lpo}} f(a, a, b) \succ_{\mathsf{lpo}} \cdots$$

$\Rightarrow$ LPO wäre nicht Noethersch.

b) **3. Bedingung in** (γ) streichen:
Es folgt $f(s(x), y) \succ_{\mathsf{lpo}} f(x, f(s(x), y))$
aber $f(s(x), y) <_{TT} f(x, f(s(x), y))$.

Also die LPO wäre keine Simplifikationsordnung. Die LPO wäre nicht Noethersch.

Erweiterungen der Präzedenz

Satz 3.24.

Seien $\gtrsim_F, \gtrsim'_F$ Präzedenzen auf F mit $>_F \subseteq >'_F$, $\gtrsim_F \subseteq \gtrsim'_F$.
Dann gilt

$$\succ_{\mathsf{rpo}} \subseteq \succ'_{\mathsf{rpo}} \qquad \succ_{\mathsf{lpo}} \subseteq \succ'_{\mathsf{lpo}}$$

Anwendung: KB-Vervollständigung

Die Präzedenz kann man nach Bedarf erweitern (zum Richten von Gleichungen). Dies verfeinert die Reduktionsordnung.

Beispiel

		RPO mit Präzedenz $>_F$
$R:$	$x + 0 \to x$	leer
	$x + s(y) \to s(x + y)$	$+ >_F s$
	$x \cdot 0 \to 0$	
	$x \cdot s(y) \to (x \cdot y) + y$	$\cdot >_F +$

Pfadordnungen mit Status: RPOS

Idee

1. Kombination von RPO, LPO.
2. Variation der LPO: lex. Vergleich „left-to-right“ und „right-to-left“

Definition 3.43

Sei $\gtrsim_F$ Präzedenz auf F.

Status $\mathsf{stat} : F \to \{\mathsf{ms}, \mathsf{l\text{-}to\text{-}r}, \mathsf{r\text{-}to\text{-}l}\}$ mit
$f \approx_F g \;\rightsquigarrow\; \mathsf{stat}(f) = \mathsf{stat}(g)$,
f hat variable Stelligkeit $\rightsquigarrow \mathsf{stat}(f) = \mathsf{ms}$.

Dann ist die RPOS $\succ_{\mathsf{rpos}}$ definiert durch

$$s \equiv f(s_1, \dots, s_n) \succ_{\mathsf{rpos}} t \equiv g(t_1, \dots, t_n)$$
$$\text{gdw } (\alpha) \text{ oder } (\beta) \text{ oder } (\gamma).$$

$$s \succ_{\mathsf{rpo}} x \text{ gdw } x \in \mathsf{Var}(s) \wedge x \not\equiv s$$

Hier ist (γ) gemäß $\mathsf{stat}(f)$ zu wählen, d. h. bei

$$\mathsf{stat}(f) = \begin{cases} \mathsf{ms} & \text{Vergleich wie bei RPO, Multiset-Vergleich} \\ \mathsf{l\text{-}to\text{-}r} & \text{Vergleich wie bei LPO, von links nach rechts} \\ \mathsf{r\text{-}to\text{-}l} & \text{Vergleich wie bei LPO, von rechts nach links} \end{cases}$$

Satz 3.25.

Jede RPOS ist eine Reduktionsordnung.

Die RPOS: Beispiele

1. Beispiel

R: $x + 0 \to x$ $\quad$ $x \cdot 0 \to 0$
$x + s(y) \to s(x) + y$ $\quad$ $x \cdot s(y) \to (x \cdot y) + x$

Präzedenz: $\cdot >_F + >_F s$

Status: $\mathsf{stat}(+) = \mathsf{r\text{-}to\text{-}l}$, $\mathsf{stat}(\cdot) = \mathsf{ms}$.

Dann gilt: $R \subseteq \succ_{\mathsf{rpos}}$.

2. Beispiel

R: $1/x \to i(x)$
$i(x/y) \to y/x$
$x/(y/z) \to (x/i(z))/y$

Präzedenz: $i \approx_F /$

Status: $\mathsf{stat}(/) = \mathsf{stat}(i) = \mathsf{r\text{-}to\text{-}l}$.

Es gilt $R \subseteq \succ_{\mathsf{rpos}}$.

Beachte

$\mathsf{stat}(f)$ wird nur für Fall (γ) benötigt.
$\mathsf{stat}(f)$ ist ohne Wirkung, falls f 1-stellig.

Vergleich $\succ_{\mathsf{rpo}}, \succ_{\mathsf{lpo}}, \rhd$

1. Bemerkung

F enthalte nur 0- und 1-stellige Operatoren

a) Zu jeder Präzedenz $\gtrsim_F$ auf F gilt $\succ_{\mathsf{rpo}} = \succ_{\mathsf{lpo}}$.

b) Gilt $\gtrsim_F =$ id (leere Präzedenz), so gilt auch $\succ_{\mathsf{rpo}} = \rhd$.

2. Bemerkung

F enthalte auch mehrstellige Operatoren

a) Es gilt $\rhd \subseteq \succ_{\mathsf{rpo}}$, i. Allg. $\rhd \neq \succ_{\mathsf{rpo}}$ auch für $\gtrsim_F =$ id.

b) $\succ_{\mathsf{rpo}}$ und $\succ_{\mathsf{lpo}}$ sind i. Allg. unvergleichbar.

Beispiele: Sei $\gtrsim_F =$ id. Es gilt:

a) $f(g(x,y)) \succ_{\mathsf{rpo}} g(y,x)$, nicht $f(g(x,y)) \rhd g(y,x)$.

b) $g(g(x,y),z) \succ_{\mathsf{lpo}} g(x, g(y,z))$,
nicht $g(g(x,y),z) \succ_{\mathsf{rpo}} g(x, g(y,z))$.

c) $h(x, f(x), f(x), f(x), x) \succ_{\mathsf{rpo}} h(f(x), x, x, x, f(x))$,
nicht $h(x, f(x), f(x), f(x), x) \succ_{\mathsf{lpo}} h(f(x), x, x, x, f(x))$.