Konfluenz ohne Termination: Beispiele (2)

3. R : $\mathsf{eq}(0,0) \to \textbf{true}$ $\qquad$ $\mathsf{eq}(0,s(y)) \to \textbf{false}$
$\mathsf{eq}(s(x),s(y)) \to \mathsf{eq}(x,y)$ $\qquad$ $\mathsf{eq}(s(x),0) \to \textbf{false}$
$\mathsf{if}(\textbf{true},x,y) \to x$ $\qquad$ $\mathsf{if}(\textbf{false},x,y) \to y$
$x+0 \to x$
$x+s(y) \to s(x+y)$
$\mathsf{div}(x,y) \to \mathsf{search}(x,y,0,0)$
$\mathsf{search}(x,y,u,v) \to \mathsf{if}(\mathsf{eq}(x,v),u,$
$\mathsf{search}(x,y,s(u),v+y))$

$\leadsto$ R ist links-linear, aber nicht terminierend.
$CP(R) = \emptyset$
$\leadsto$ R ist konfluent.

Es gilt

- $\mathsf{div}(s^i(0),s^j(0)) \xrightarrow{*} s^k(0)$ für $i = j \cdot k$
- $\mathsf{div}(s^i(0),s^j(0))$ führt zu unendlicher Rechnung für $j \not| i$

3.5.2 Terminationskriterien

Problem (Termination)
Eingabe: R, Regelsystem über sig $= (S,F,\tau)$.
Frage: Ist R terminierend?

Lemma 3.13
$\longrightarrow_R$ ist terminierend auf $\mathsf{Term}(F)$ gdw
$\longrightarrow_R$ ist terminierend auf $\mathsf{Term}(F,V)$.

Beweis:

a) „$\curvearrowleft$“ trivial.
b) „$\curvearrowright$“ Annahme: Es gibt unendliche Kette
$t_0 \longrightarrow_R t_1 \longrightarrow_R t_2 \longrightarrow_R \cdots$

$\leadsto$ $\mathsf{Var}(t_i) \subseteq \mathsf{Var}(t_0)$

Sei σ Grundsubstitution mit $\mathsf{dom}(\sigma) = \mathsf{Var}(t_0)$.

$\leadsto$ $\sigma(t_0) \longrightarrow_R \sigma(t_1) \longrightarrow_R \sigma(t_2) \longrightarrow_R \cdots$

Dies ist eine unendliche Ableitung auf $\mathsf{Term}(F)$ $\lightning$

Termination von R auf Term(F)

Definition 3.19

Sei $\succ$ eine Partialordnung auf Term(F,V).

$\succ$ ist **verträglich mit der Termstruktur**, falls gilt

$$s \succ t \rightsquigarrow t_0[p \leftarrow s] \succ t_0[p \leftarrow t]$$

Beachte

Gilt stets $s \succ t \rightsquigarrow f(\cdots, s, \cdots) \succ f(\cdots, t, \cdots)$

so ist $\succ$ verträglich mit der Termstruktur.

Satz 3.9.

Sei $\succ$ Noethersche Partialordnung auf Term(F,V) und verträglich mit der Termstruktur.

Gilt $\sigma(l) \succ \sigma(r)$ für alle $l \to r$ in R, σ Grundsubstitution, so ist R terminierend auf Term(F) (also auch auf Term(F,V)).

Beachte

Dies ist ein unendlicher Test!

Termination von R auf Term(F,V)

Definition 3.20

$\succ$ auf Term(F,V) ist eine **Reduktionsordnung**, falls gilt

1. $\succ$ ist Noethersche Partial-Ordnung,
2. $\succ$ ist verträglich mit der Termstruktur,
3. $\succ$ ist verträglich mit Substitutionen.

Satz 3.10.

Sei R Regelsystem, und $\succ$ Reduktionsordnung mit $l \succ r$ für alle $l \to r$ in R.
Dann ist R terminierend.

Beachte

a) Dies ist ein endlicher Test!

b) Ist R terminierend und gilt $\succ\ = \xrightarrow{+}_R$, so ist $\succ$ eine Reduktionsordnung.

Die Knuth-Bendix-Ordnung

Sei sig $= (S, F, \tau)$

$>_F$ Partialordnung auf F.

$\varphi : F \cup V \to \mathbb{N}$ eine Gewichtsfunktion mit

$\varphi(x) = \mu > 0$	$x \in V$
$\varphi(f) \geq \mu$	f Konstante
$\varphi(f) > 0$	f einstellig
$\varphi(f) \geq 0$	sonst

$\varphi :$ Term$(F, V) \to \mathbb{N}$

$$\varphi(f(t_1, \ldots, t_n)) = \varphi(f) + \sum_{i=1}^{n} \varphi(t_i)$$

Definition 3.21

Die **KB-Ordnung** $\succ_{\mathsf{kbo}}$ zu $(>_F, \varphi)$ ist

$s \equiv f(s_1, \ldots, s_n) \succ_{\mathsf{kbo}} t \equiv g(t_1, \ldots, t_m)$ gdw

1) $\varphi(s) > \varphi(t) \wedge |s|_x \geq |t|_x$ für alle $x \in$ Var(s, t) oder

2) $\varphi(s) = \varphi(t) \wedge |s|_x \geq |t|_x$ für alle $x \in$ Var(s, t) und

2a) $f >_F g$ oder

2b) $f = g \wedge s_1 \equiv t_1 \wedge \cdots \wedge s_k \equiv t_k \wedge s_{k+1} \succ_{\mathsf{kbo}} t_{k+1}$

$s \succ_{\mathsf{kbo}} x$ gdw $x \in$ Var$(s) \wedge x \not\equiv s$

Terminationsbeweise mit der KBO

Satz 3.11.

Jede KBO ist eine Reduktionsordnung.

Also

$R \subseteq \succ$, $\succ$ eine KBO $\rightsquigarrow R$ ist terminierend.

Beispiele

1. $R : g(x) \to f(f(x)) \quad h(f(x)) \to g(g(x))$
   Wähle $>_F = \varnothing \quad \varphi(f) = 1 \quad \varphi(g) = 3$
   $\varphi(h) = 6 \quad \mu = 1$
   Dann gilt $l \succ_{\mathsf{kbo}} r$ für alle $l \to r$ in R.

2. $R : x + 0 \to x$
   $x + s(y) \to s(x + y)$
   $(x + y) + z \to x + (y + z)$
   Wähle $>_F$: $+ >_F s$
   $\varphi : \varphi(0) = \varphi(s) = \varphi(+) = 1 \qquad \mu = 1$
   Dann gilt $l \succ_{\mathsf{kbo}} r$ für alle $l \to r$ in R.

Gegenbeispiele

1. $R : f(x) \to gf(x)$

   Wähle $\varphi(f) = 1 \quad \varphi(g) = 0 \quad \varphi(x) = 1$

   $\rightsquigarrow \varphi(f(x)) = 2 = \varphi(gf(x))$
   $f >_F g$ (freie Wahl der Präzedenz)

   $\rightsquigarrow f(x) \succ_{\mathsf{kbo}} gf(x)$ nach 2a).

   Aber: R ist **nicht** terminierend!

   $\varphi(g) = 0$ **nicht** erlaubt, da g einstellig.

2. $R : f(g(a), x) \to f(x, x)$

   Wähle $\varphi(f) = \varphi(g) = \varphi(a) = \varphi(x) = 1$

   $\rightsquigarrow \varphi(f(g(a), x)) > \varphi(f(x, x))$

   $\rightsquigarrow f(g(a), x) \succ_{\mathsf{kbo}} f(x, x)$

   Aber: R ist **nicht** terminierend!

   z. B. $f(g(a), g(a)) \to f(g(a), g(a))$
   Es gilt **nicht** $|f(g(a), x)|_x \geq |f(x, x)|_x$

Beweis-Skizze zum Satz

Sei $\succ \; = \; \succ_{\mathsf{kbo}}$

a) $\succ$ ist Partialordnung (Übung).

b) Verträglichkeit mit der Termstruktur:
Sei $s \succ t \quad s' \equiv f(\cdots, s, \cdots) \quad t' \equiv f(\cdots, t, \cdots)$
$s \succ t$ nach 1) $\quad \rightsquigarrow s' \succ t'$ nach 1)
$s \succ t$ nach 2) $\quad \rightsquigarrow s' \succ t'$ nach 2b)
$s \succ x \equiv t \quad \rightsquigarrow s' \succ t'$ nach 1)

c) Verträglichkeit mit Substitutionen: Es gilt (Übung)
(1) $\varphi(s) \geq \mu > 0$
(2) $\varphi(\sigma(s)) = \varphi(s) + \sum_{x \in V} (\varphi(\sigma(x)) - \mu) \cdot |s|_x$
Beh.: $s \succ t \rightsquigarrow \sigma(s) \succ \sigma(t)$
Bew.: Induktion nach $|s|$ mit (1) und (2):
$s \succ t$ nach 1) $\quad \rightsquigarrow \sigma(s) \succ \sigma(t)$ nach 1)
$s \succ t$ nach 2a) $\quad \rightsquigarrow \sigma(s) \succ \sigma(t)$ nach 1) oder 2a)
$s \succ t$ nach 2b) $\quad \rightsquigarrow \sigma(s) \succ \sigma(t)$ nach 1) oder 2b)+I.V.
$s \succ x \equiv t \quad \rightsquigarrow \sigma(s) \succ \sigma(t)$ nach 1)

Beweis-Skizze zum Satz (Forts.)

d) $\succ_{\mathsf{kbo}}$ ist Noethersch:

(1) Es gilt $\varphi(f(t_1, \ldots, t_n)) > \varphi(t_i) > 0$

(2) Setze

$$s \succ_0 t \text{ gdw } \varphi(s) > \varphi(t) \text{ oder}$$
$$\varphi(s) = \varphi(t), \mathsf{top}(s) >_F \mathsf{top}(t)$$

$P(t)$ gdw jede $\succ_{\mathsf{kbo}}$-Kette ab t ist endlich.

(3) Zeige $\forall t : P(t)$
durch Induktion nach $\succ_0$.

3.6 Knuth-Bendix-Vervollständigung

3.6.1 Vervollständigung

Problem

Eingabe: E Gleichungssystem über sig.
Ziel: Konvergentes R zu E (d. h., $=_E \; = \; \overset{*}{\longleftrightarrow}_R$)

Dann $s =_E t$ gdw $s{\downarrow} \equiv t{\downarrow}$.

1. Ansatz

Sei $\succ$ feste Reduktions-Ordnung.

1. Richte E mit $\succ$ zu R.
2. Teste R auf (lokale) Konfluenz.
3. Falls R nicht lokal konfluent: „Repariere" die lokale Konfluenz, gehe zu 2.

$\Rightarrow$ sehr simpel

- häufiger Abbruch
- schlechte Effizienz

Vervollständigung: Beispiel

Sei

$E : x + 0 = x \qquad (x + y) + z = x + (y + z)$

$\succ$: KBO zu $\varphi(0) = \varphi(+) = 1$

1. Richten von E liefert

   R_1: (1) $x + 0 \to x$
   (2) $(x + y) + z \to x + (y + z)$

2. Test auf lokale Konfluenz

$$\begin{tikzcd} & (x+0)+z \arrow[dl, "(2)"'] \arrow[dr, "(1)"] & \\ x+(0+z) & & x+z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (x+y)+0 \arrow[dl, "(2)"'] \arrow[dr, "(1)"] & \\ x+(y+0) \arrow[rr] & & x+y \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & ((x+y)+z)+z' \arrow[dl, "(2)"'] \arrow[dr, "(2)"] & \\ (x+y)+(z+z') \arrow[dr, "*"'] & & (x+(y+z))+z' \arrow[dl, "*"] \\ & x+(y+(z+z')) & \end{tikzcd}$$

   Ergebnis: Ein kritisches Paar ist nicht zusammenführbar.

Vervollständigung: Beispiel (Forts.)

3. Reparatur: Nimm das kritische Paar als Regel auf.

   R_2: R_1 und
   (3) $x + (0 + y) \to x + y$

4. Test auf lokale Konfluenz

$$\begin{tikzcd} & x+(0+0) \arrow[dl, "(3)"'] \arrow[dr, "(1)"] & \\ x+0 & & x+0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & x'+(0+(0+y)) \arrow[dl, "(3)"'] \arrow[dr, "(3)"] & \\ x'+(0+y) & & x'+(0+y) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & (x+y)+(0+z) \arrow[dl, "(3)"'] \arrow[dr, "(2)"] & \\ (x+y)+z \arrow[dr, "*"'] & & x+(y+(0+z)) \arrow[dl, "*"] \\ & x+(y+z) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (x+(0+y))+z \arrow[dl, "(2)"'] \arrow[dr, "(3)"] & \\ x+((0+y)+z) \arrow[dr, "*"'] & & (x+y)+z \arrow[dl, "*"] \\ & x+(y+z) & \end{tikzcd}$$

   Ergebnis: R_2 ist lokal konfluent.

5. Stopp: R_2 ist konvergentes Regelsystem zu E.

Vervollständigung: 2. Ansatz

Eingabe: $E, \succ$.

Idee Zustände: (E_i, R_i)

Transformation $(E, \varnothing) \rightsquigarrow (\varnothing, R)$

Invarianzen: R_i terminierend $(R_i \subseteq \succ)$

$=_{E_i \cup R_i} \; = \; =_E$

Inferenzregeln

(1) Lösche $t = t$.

(2) Simplifiziere Regel/Gleichung.

(3) Richte Gleichung zu Regel.

(4) Bilde kritische Paare.

Vergleiche mit Inferenzsystem $\mathcal{B}$ aus Kapitel 2.

Vervollständigung: 2. Ansatz: Beispiel

Sei

$E : \; f(f(x)) = f(x), \;\; f(f(x)) = g(x), \;\; g(g(x)) = x$
$\succ$ die Knuth-Bendix-Ordnung zu $\varphi(f) = 2, \; \varphi(g) = 1$

Es ergibt sich die in der folgenden Tabelle dargestellten Rechnung. Dabei ist die zu bearbeitende Gleichung bzw. Regel unterstrichen. Man beachte, dass die Regel (4) hier gar nicht verwendet wird, es reicht das Richten von Gleichungen zu Regeln und das Simplifizieren. Das Ergebnis der Rechnung ist $R = R_9 = \{f(x) \to x, \; g(x) \to x\}$, und R ist konvergentes Regelsystem zu E.

Vervollständigung: 2. Ansatz: Beispiel (Forts.)

i	R_i	E_i
0	–	$\underline{f(f(x)) = f(x)}$, $f(f(x)) = g(x)$, $g(g(x)) = x$
1	$f(f(x)) \to f(x)$	$\underline{f(f(x)) = g(x)}$, $g(g(x)) = x$
2	$f(f(x)) \to f(x)$	$\underline{f(x) = g(x)}$, $g(g(x)) = x$
3	$\underline{f(f(x)) \to f(x)}$ $f(x) \to g(x)$	$g(g(x)) = x$
4	$f(x) \to g(x)$	$\underline{g(g(x)) = x}$, $g(g(x)) = g(x)$
5	$f(x) \to g(x)$ $g(g(x)) \to x$	$\underline{g(g(x)) = g(x)}$
6	$f(x) \to g(x)$ $g(g(x)) \to x$	$\underline{x = g(x)}$
7	$\underline{f(x) \to g(x)}$ $\underline{g(g(x)) \to x}$ $g(x) \to x$	
8	$g(x) \to x$	$\underline{f(x) = x}$, $\underline{x = x}$
9	$f(x) \to x$ $g(x) \to x$	

3.6.2 Das Inferenzsystem $\mathcal{P}$

Idee: $\mathcal{P}$ (mit Reduktionsordnung $\succ$)

- arbeitet auf Zuständen (E, R),
- verkleinert Beweise, bis jeder Beweis einen V-Beweis hat.

Definition 3.22

Ein **Beweis** zu $s = t$ in (E, R) ist eine Folge

$$B = (t_0, b_1, t_1, \ldots, t_{n-1}, b_n, t_n)$$

mit $t_0 \equiv s$, $t_n \equiv t$
$t_i \longrightarrow_R t_{i+1}$ oder $t_i \longleftarrow_R t_{i+1}$ oder $t_i \vdash\!\!\!\longrightarrow\!\!\dashv_E t_{i+1}$
und

$$\begin{aligned} b_{i+1} &= (l \to r, p), && \text{falls } t_i \longrightarrow_R t_{i+1} \text{ mit } l \to r \text{ bei } p \in O(t_i), \\ &= (r \leftarrow l, p), && \text{falls } t_i \longleftarrow_R t_{i+1} \text{ mit } l \to r \text{ bei } p \in O(t_{i+1}), \\ &= (u = v, -), && \text{falls } t_i \vdash\!\!\!\longrightarrow\!\!\dashv_E t_{i+1} \text{ mit } u = v. \end{aligned}$$

V-Beweis, falls $t_0 \longrightarrow t_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow t_i \longleftarrow \cdots \longleftarrow t_n$.

leerer Beweis, falls $n = 0$.