Beweis-Skizze zu Satz 3.5

Sei $R = \{l_i \to r_i \mid i = 1, \ldots, n\}$

Berechne

$$M_{ij} = \{t \mid r_i \xrightarrow{j}_R t\} \quad i = 1, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots$$

Es gilt

R terminierend $\rightsquigarrow \exists k : M_{ik} = \emptyset$ für alle $i = 1, \ldots, n$ $\qquad (\alpha)$

R nicht terminierend $\rightsquigarrow \exists i, j \in \mathbb{N}_+, t \in M_{ij}, t \geq_{TT} r_i$ $\qquad (\beta)$

Also berechne die M_{ij}, bis (α) oder (β) auftritt:

(α) tritt auf $\rightsquigarrow$ R terminierend.

(β) tritt auf $\rightsquigarrow$ R nicht terminierend.

Beispiel

1. $R : g(a) \to f(b) \qquad a \to b$

   $f(b), b$ sind irreduzibel.
   $\rightsquigarrow$ R ist terminierend.

2. $R : g(a) \to f(b) \qquad b \to a$

   Es gilt
   $f(b) \to f(a)$, $f(a)$ und a sind irreduzibel.
   $\rightsquigarrow$ R ist terminierend.

3. $R : g(a) \to f(b) \qquad b \to g(a)$

   Es gilt
   $g(a) \to f(b) \to f(g(a))$.
   $\rightsquigarrow$ R ist nicht terminierend, da $f(g(a)) \geq_{TT} g(a)$.

Konfluenz

Nächstes Ziel:

1. Für terminierende Regelsysteme ist die Konfluenz entscheidbar.

2. Für beliebige Regelsysteme gilt:
   Sind die Regeln in R linear und „überlappungsfrei", so ist R konfluent.

3.4 Matching und Unifikation

3.4.1 Matching

Problem

Eingabe: $s, l \to r$
Frage: Ist s mit $l \to r$ reduzierbar?

Definition 3.14

σ heißt ein **Match** von l auf t, falls $\sigma(l) \equiv t$.

Also: s mit $l \to r$ reduzierbar
gdw es gibt $p \in O(s)$ und
Match σ von l auf s/p.

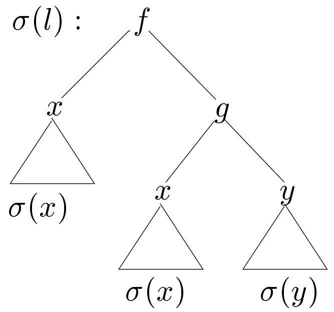
Lemma 3.7

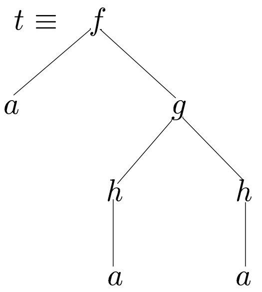
a) Es ist entscheidbar, ob es einen Match von l auf t gibt.
b) Gibt es einen Match von l auf t, so ist er eindeutig (auf Var(l)) und berechenbar.

Matching: Beispiel (1)

Beispiel 1

$l \equiv f(x, g(x, y))$ $\qquad$ $t \equiv f(a, g(h(a), h(a)))$





$\rightsquigarrow$ Problem: Gleichungslösen.
$E : x =^? a, \quad x =^? h(a), \quad y =^? h(a)$

E ist unlösbar!

$\rightsquigarrow$ Es gibt keine σ mit $\sigma(l) \equiv t$.

Matching: Beispiel (2)

Beispiel 2

$l \equiv f(x, g(x, y)) \qquad t \equiv f(a, g(a, h(a)))$.

$\rightsquigarrow E : x =^? a, \quad x =^? a, \quad y =^? h(a)$

$\rightsquigarrow E$ ist lösbar durch

$$\sigma = \{x \leftarrow a, y \leftarrow h(a)\}$$

$\rightsquigarrow \sigma$ ist Match von l auf t.

Beispiel 3

$l \equiv f(x, g(y, z)) \qquad t \equiv f(a, h(a))$.

$\rightsquigarrow E : x =^? a, \quad g(y, z) =^? h(a)$

$\rightsquigarrow E$ ist unlösbar. Es gibt keinen Match von l auf t.

Einige Ordnungen auf Termen

Setze

- **Teiltermordnung**
  $t >_{TT} s$ gdw s ist echter Teilterm von t.
- **Subsumptionsordnung**
  $t \mathrel{\dot{\geq}} s$ gdw $\exists \sigma : t \equiv \sigma(s)$
- **Umschließungsordnung**
  $t \mathrel{\dot{\trianglerighteq}} s$ gdw $\exists \sigma, p \in O(t) : t/p \equiv \sigma(s)$

Also:

1. $\geq_{TT} \cup \mathrel{\dot{\geq}} \subseteq \mathrel{\dot{\trianglerighteq}}$.
2. t reduzierbar mit $l \to r$ gdw $t \mathrel{\dot{\trianglerighteq}} l$.
3. $t \mathrel{\dot{\trianglerighteq}} s \wedge s \mathrel{\dot{\trianglerighteq}} t$ gdw
   es gibt Variablenumbenennung ξ mit $t \equiv \xi(s)$.

Lemma 3.8

$\mathrel{\dot{\geq}}$ und $\mathrel{\dot{\trianglerighteq}}$ sind Noethersche Quasiordnungen.

Beweis-Idee: $\varphi(t) = |t| - ||\mathsf{Var}(t)||$

$$t \mathrel{\dot{\triangleright}} s \rightsquigarrow \varphi(t) > \varphi(s)$$

3.4.2 Unifikation

Motivation Divergenzanalyse für die Konfluenz von $\longrightarrow_R$.

Eingabe: $l_1 \to r_1 \quad l_2 \to r_2$
Frage: Gibt es $t \geq_{TT} s$ so, dass t mit $l_1 \to r_1$ und s mit $l_2 \to r_2$ reduzierbar ist?

Beispiel

R: (1) $(x' \cdot y') \cdot z' \to x' \cdot (y' \cdot z')$ (2) $x \cdot x^{-1} \to 1$.

a)
$$\begin{tikzcd} & (x \cdot x^{-1}) \cdot z \arrow[dl, "(1)"'] \arrow[dr, "(2)"] & \\ x \cdot (x^{-1} \cdot z) & & 1 \cdot z \end{tikzcd}$$

b)
$$\begin{tikzcd} & (x \cdot y) \cdot (x \cdot y)^{-1} \arrow[dl, "(1)"'] \arrow[dr, "(2)"] & \\ x \cdot (y \cdot (x \cdot y)^{-1}) & & 1 \end{tikzcd}$$

a) $x' \cdot y'$ und $x \cdot x^{-1}$ sind unifizierbar mit
$\sigma = \{x' \leftarrow x, y' \leftarrow x^{-1}\}$:
$\sigma(x' \cdot y') \equiv x \cdot x^{-1} \equiv \sigma(x \cdot x^{-1})$

b) $(x' \cdot y') \cdot z'$ und $x \cdot x^{-1}$ sind unifizierbar mit
$\sigma = \{x' \leftarrow x, y' \leftarrow y, x \leftarrow x \cdot y, z' \leftarrow (x \cdot y)^{-1}\}$:
$\sigma((x' \cdot y') \cdot z') \equiv (x \cdot y) \cdot (x \cdot y)^{-1} \equiv \sigma(x \cdot x^{-1})$

Unifikation: Definitionen

Definition 3.15

a) s und t heißen **unifizierbar**, falls es σ gibt mit $\sigma(s) \equiv \sigma(t)$. Dann heißt σ ein **Unifikator** zu s, t.
b) Ein Unifikator σ zu s, t heißt **allgemeinster Unifikator**, $\sigma = \text{mgu}(s, t)$, falls zu jedem Unifikator τ ein ϱ existiert mit $\tau = \varrho \circ \sigma$ auf $\text{Var}(s, t)$.

Beispiel

$s \equiv x' \cdot y' \qquad t \equiv x \cdot x^{-1}$

Unifikatoren sind

$$\sigma_1 = \{x' \leftarrow a, y' \leftarrow a^{-1}, x \leftarrow a\}$$
$$\sigma_2 = \{x' \leftarrow x, y' \leftarrow x^{-1}\}$$
$$\sigma_3 = \{x' \leftarrow z, y' \leftarrow z^{-1}, x \leftarrow z\}$$

Allgemeinste Unifikatoren: σ_2, σ_3

$$\sigma_1 = \varrho \circ \sigma_2 \text{ mit } \varrho = \{x \leftarrow a\}$$
$$\sigma_1(s) \equiv a \cdot a^{-1} \equiv \sigma_1(t)$$
$$\varrho \circ \sigma_2(s) \equiv \varrho(x \cdot x^{-1}) \equiv a \cdot a^{-1} \equiv \varrho \circ \sigma_2(t)$$

Das Unifikationsproblem

Definition 3.16

Sei $E = \{s_i =^? t_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ gegeben.

a) σ ist **Unifikator** zu E, falls gilt $\sigma(s_i) \equiv \sigma(t_i)$ für alle i.
   σ ist **allgemeinster Unifikator** ($\sigma = \text{mgu}(E)$), falls gilt:
   σ ist Unifikator zu E,
   für alle Unifikatoren τ zu E gibt es ϱ mit $\tau = \varrho \circ \sigma$ auf $\text{Var}(E)$.
b) $\text{Sol}(E)$=Menge der Unifikatoren zu E.
   E, E' sind **äquivalent**, falls gilt $\text{Sol}(E)$=$\text{Sol}(E')$.
c) E' ist **in gelöster Form**, falls gilt
   $E' = \{x_j =^? t'_j \mid j = 1, \ldots, m\}$
   $x_i \not\equiv x_j$ für $i \neq j$
   $x_i \notin \text{Var}(t'_j)$ für $1 \leq i \leq j \leq m$
   „E' ist in Dreiecksgestalt"

Lemma 3.9

Seien E, E' äquivalent, E' in gelöster Form, $\sigma_j = \{x_j \leftarrow t_j\}$, $\sigma = \sigma_m \circ \cdots \circ \sigma_1$. Dann ist $\sigma = \text{mgu}(E)$.

Unifikation: Ein Beispiel

Problem

$$f(x,y) =^? f(g(y), g(z))$$

Lösung

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{f(x,y) =^? f(g(y), g(z))}{x =^? g(y) \quad y =^? g(z)}\ \text{zerlegen}}{x =^? g(y) \quad y \leftarrow g(z)}\ \text{lösen}}{x =^? g(g(z))}\ \text{propagieren}}{x \leftarrow g(g(z))}\ \text{lösen}$$

Also $\sigma = \{x \leftarrow g(g(z)), y \leftarrow g(z)\}$.

Beachte

Dies ist Gleichungs-Lösen mit Variablen auf beiden Seiten der Gleichungen.

Unifikation: Beobachtungen

Beachte

- $f(s_1, \ldots, s_n) =^? g(t_1, \ldots, t_m)$ ist unlösbar für $f \neq g$
- $f(s_1, \ldots, s_n) =^? f(t_1, \ldots, t_n)$ hat Lösung σ gdw $\{s_i =^? t_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ hat Lösung σ
- $x =^? t \qquad x \notin \mathsf{Var}(t)$
  $\rightsquigarrow \sigma = \{x \leftarrow t\} = \mathsf{mgu}(x,t)$
- $x =^? t \qquad x \in \mathsf{Var}(t)$, $x \not\equiv t$ ist unlösbar

Inferenzsystem Unify

Definition 3.17

Unify arbeitet auf Paaren (E, S), S=gelöster Anteil.

(1) Löschen

$$\frac{(E \cup \{s =^? s\}, S)}{(E, S)}$$

(2) Zerlegen

a) $$\frac{(E \cup \{g(s_1, \ldots, s_m) =^? f(t_1, \ldots, t_n)\}, S)}{\text{UNLÖSBAR}}$$

b) $$\frac{(E \cup \{f(s_1, \ldots, s_n) =^? f(t_1, \ldots, t_n)\}, S)}{(E \cup \{s_1 =^? t_1, \ldots, s_n =^? t_n\}, S)}$$

(3) Lösen

a) $$\frac{(E \cup \{x =^? t\}, S)}{\text{UNLÖSBAR}} \quad \text{falls } x \in \mathsf{Var}(t), x \not\equiv t$$

b) $$\frac{(E \cup \{x =^? t\}, S)}{(\sigma(E), S \cup \{x =^? t\})} \quad \text{falls } x \notin \mathsf{Var}(t), \sigma = \{x \leftarrow t\}$$

Ableitungsrelation $(E, S) \vdash (E', S')$

Unifizieren mit Unify

Ziel $(E, \varnothing \overset{*}{\vdash} (\varnothing, S)$
$\rightsquigarrow$ S ist die Lösung zu E.

Beispiel $f(g(x,z), g(a,z)) =^? f(g(y,b), x)$

E_i	S_i	
1. $f(g(x,z), g(a,z)) =^? f(g(y,b), x)$	–	Start
2. $x =^? g(a,z)$, $g(y,b) =^? g(x,z)$	–	Zerlegen
3. $g(y,b) =^? g(g(a,z), z)$	$x =^? g(a,z)$	Lösen
4. $y =^? g(a,z)$, $z =^? b$	$x =^? g(a,z)$	Zerlegen
5. $y =^? g(a,b)$	$x =^? g(a,z)$, $z =^? b$	Lösen
6. –	$x =^? g(a,z)$, $z =^? b$, $y =^? g(a,b)$	Lösen

$\sigma = \{y \leftarrow g(a,b), z \leftarrow b, x \leftarrow g(a,b)\} = \mathsf{mgu}(E)$

Unifizieren mit Unify (Forts.)

$E : f(x,x) =^? f(y,g(y))$

E_i	S_i	
1. $f(x,x) =^? f(y,g(y))$	–	Start
2. $x =^? y, x =^? g(y)$	–	Zerlegen
3. $y =^? g(y)$	$x =^? y$	Lösen
4. UNLÖSBAR		Lösen

$E : f(x,y) =^? f(y,x)$

E_i	S_i	
1. $f(x,y) =^? f(y,x)$	–	Start
2. $x =^? y, y =^? x$	–	Zerlegen
3. $y =^? y$	$x =^? y$	Lösen
4. –	$x =^? y$	Löschen

$\rightsquigarrow \sigma = \{x \leftarrow y\}$

Ergebnisse

Satz 3.6.
Jede Folge $(E, \varnothing) \vdash (E_1, S_1) \vdash (E_2, S_2) \vdash \cdots$ bricht ab (1) entweder mit UNLÖSBAR, dann ist E unlösbar oder (2) mit $(E_k, S_k) = (\varnothing, S)$. Dann ist S äquivalent zu E und in gelöster Form.

Beweis-Skizze:

1. $E_i \cup S_i$ und $E_{i+1} \cup S_{i+1}$ sind äquivalent.
   $x =^? t$ in $S_i \rightsquigarrow x \notin \mathsf{Var}(E_i)$.
   S_i ist in gelöster Form.

2. UNLÖSBAR im i-ten Schritt erzeugt gdw $E_i \cup S_i$ ist unlösbar.

3. Abbruch nur, falls $E_k = \varnothing$ oder UNLÖSBAR erzeugt.

4. Termination
   $E >_0 E'$ gdw $\|\mathsf{Var}(E)\| > \|\mathsf{Var}(E')\|$ oder
   $\|\mathsf{Var}(E)\| = \|\mathsf{Var}(E')\|$,
   $M(E) \gg_{TT} M(E')$

   $(E,S) \vdash (E',S') \rightsquigarrow E >_0 E'$
   $>_0$ ist Noethersch, also hält das Verfahren.