Modelle: Beispiel (4)

Sei sig, $\mathcal{A}, \mathcal{A}_i$ wie oben.

a) $u \equiv x \wedge x \qquad v \equiv x$

Es gilt

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A} & \models u = v, & \text{d. h. } u = v \text{ gilt in } \mathcal{A} \\ \mathcal{A}_1 & \not\models u = v, & \text{d. h. } u = v \text{ gilt nicht in } \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 & \not\models u = v, & \text{d. h. } u = v \text{ gilt nicht in } \mathcal{A}_2 \\ \mathcal{A}_3 & \not\models u = v, & \text{d. h. } u = v \text{ gilt nicht in } \mathcal{A}_3 \end{array}$$

b) $s \equiv x \wedge (y \vee z) \qquad t \equiv (z \vee y) \wedge x$

Es gilt

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A} & \models s = t & \\ \mathcal{A}_i & \models s = t & \text{für } i = 1, 2, 3 \\ E & \models s = t & \text{also } \mathcal{A}' \models s = t \text{ für alle Modelle } \mathcal{A}' \\ & & \text{von spec} = (\text{sig}, E). \end{array}$$

Substitutionen/Termersetzung

Gegeben: $\text{sig} = (S, F, \tau) \qquad V = \bigcup_{s \in S} V_s$

$\text{spec} = (\text{sig}, E)$

Definition 3.6

a) Eine **Substitution** ist

$\sigma: \; V_s \to \text{Term}_s(F, V)$

$\sigma: \; \text{Term}(F, V) \to \text{Term}(F, V)$

$\quad \sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) \equiv f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$

b) **Termersetzung** $t[p \leftarrow s]$

$$\begin{array}{ll} t[\lambda \leftarrow s] & \equiv s \\ t[ip \leftarrow s] & = f(t_1, \ldots, t_i[p \leftarrow s], \ldots, t_n) \\ & \quad \text{falls } t \equiv f(t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_n) \\ t[p \leftarrow s] & \quad \text{nur erlaubt, falls sort}(t/p) = \text{sort}(s) \end{array}$$

Beispiel

$$\begin{array}{ll} t & \equiv \text{len}(s(0).s(s(0)).\text{nil}) \\ t/11 & \equiv s(0) \\ t[11 \leftarrow u] & \equiv \text{len}(u.s(s(0)).\text{nil}) \\ t/122 & \equiv \text{nil} \\ t[122 \leftarrow q] & \equiv \text{len}(s(0).s(s(0)).q) \end{array}$$

Operationale E-Gleichheit

Gegeben: sig, V, spec $=$ (sig, E)

Definition 3.7

Setze

$$
\begin{array}{ll}
t_1 \longmapsto\!\!\dashv_E t_2 \text{ gdw} & t_1/p \equiv \sigma(u) \quad t_2 \equiv t_1[p \leftarrow \sigma(v)] \\
& p \in O(t_1) \\
& u = v \text{ oder } v = u \text{ in } E.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
t_1 =_E t_2 \text{ gdw} & t_1 \overset{*}{\longmapsto\!\!\dashv}_E t_2 \\
E \vdash t_1 = t_2 \text{ gdw} & t_1 =_E t_2
\end{array}
$$

Beispiel

$E : x + 0 = x \qquad x + s(y) = s(x + y)$

Es gilt

$$
\begin{array}{ll}
(x+y)+s(0) & \longmapsto\!\!\dashv_E s((x+y)+0) \longmapsto\!\!\dashv_E s(x+y) \\
& \longmapsto\!\!\dashv_E x + s(y) \longmapsto\!\!\dashv_E x + s(y+0) \\
& \longmapsto\!\!\dashv_E x + (y + s(0))
\end{array}
$$

also $(x + y) + s(0) =_E x + (y + s(0))$

Es gilt nicht

$(x + y) + z =_E x + (y + z)$

Existenz von Modellen

Frage: Hat jede Spezifikation ein Modell?
JA!

Beispiel

spec $=$ (sig, E) sig $= (S, F, \tau)$

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{A} & = \mathcal{A}^{\text{fin}} \\
& = ((A_s)_{s \in S}, (f^{\mathcal{A}})_{f \in F})
\end{array}
$$

$A_s = \{c_s\}$ A_s besteht aus 1 Element.

Sei $f : s_1 \ldots s_n \to s$
$f^{\mathcal{A}}(c_{s_1}, \ldots, c_{s_n}) = c_s$

$\leadsto$ $\mathcal{A}$ ist sig-Algebra,
$\mathcal{A}$ erfüllt jede Gleichung.

$\leadsto$ $\mathcal{A}$ ist ein Modell von spec,
finales Modell von spec.

Finales Modell: Beispiel

Signatur sig

S: NAT, LIST

F: $0 : \to$NAT   nil : $\to$LIST

s : NAT $\to$ NAT   . : NAT, LIST $\to$ LIST

app : LIST, LIST $\to$ LIST

Finale sig-Algebra

$\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\mathsf{fin}}$

$A_{\mathsf{NAT}} = \{c_{\mathsf{NAT}}\}$ $A_{\mathsf{LIST}} = \{c_{\mathsf{LIST}}\}$

$0^{\mathcal{A}} = c_{\mathsf{NAT}}$ $\mathsf{nil}^{\mathcal{A}} = c_{\mathsf{LIST}}$

$s^{\mathcal{A}}(x) = c_{\mathsf{NAT}}$ $.^{\mathcal{A}}(x, q) = c_{\mathsf{LIST}}$

$\mathsf{app}^{\mathcal{A}}(q, q') = c_{\mathsf{LIST}}$

$\leadsto \mathcal{A} \models s = t$
für jede Gleichung $s = t$.

3.2.2 Konstruktion von Modellen

Gegeben: spec $=$ (sig, E)

Definition 3.8

Die **freie Termalgebra** (von V_0 erzeugt)

$$\mathcal{A} = \mathcal{I}(F, V_0) = ((A_s)_{s \in S}, \mathcal{F})$$

$$A_s = \mathsf{Term}_s(F, V_0)$$

$$\hat{f}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n), \text{ falls } f : s_1 \ldots s_n \to s.$$

Lemma 3.1

$\mathcal{A}$ ist ein Modell von $\mathsf{spec}_0 = (\mathsf{sig}, \varnothing)$.

Ein Modell zu spec $= (\mathbf{sig}, E)$

Definition 3.9

Die Quotientenalgebra

$\mathcal{A} = \mathcal{I}(F, V_0)/{=_E} = ((A_s)_{s \in S}, \mathcal{F})$

- $A_s = \{[t] \mid t \in \text{Term}_s(F, V_0)\}$
- $\hat{f}([t_1], \ldots, [t_n]) = [f(t_1, \ldots, t_n)]$

$[t] = \{s \mid t =_E s\}$ E-Äquivalenz-Klasse.

Satz 3.1.

Für jedes V_0 gilt:

$\mathcal{A} = \mathcal{I}(F, V_0)/{=_E}$ ist ein Modell zu spec $=$ (sig, E).

Definition 3.10

$\mathcal{A}$ heißt die **freie Algebra** über V_0 in Mod(spec).

Das **initiale Modell** zu spec $=$ (sig, E) ist

$$I(\text{spec}) = \mathcal{I}(F, \emptyset)/{=_E}$$

Beweis zu Satz 3.1

Lemma 3.2

a) Sei $\varphi : V \to \mathcal{A}$, etwa $\varphi(x) = [t_x]$ und $\sigma = \sigma_\varphi$ die Substitution mit $\sigma(x) = t_x$. Sei $t \in \text{Term}(F, V)$. Dann gilt $\varphi(t) = [\sigma_\varphi(t)]$ in $\mathcal{A}$.

b) Sei σ eine Substitution und $\varphi = \varphi_\sigma : V \to \mathcal{A}$ gegeben durch $\varphi(x) = [\sigma(x)]$. Sei $t \in \text{Term}(F, V)$. Dann gilt $\varphi_\sigma(t) = [\sigma(t)]$ in $\mathcal{A}$.

Beweis: Induktion über den Aufbau von t.

Beweis zum Satz

a) $\mathcal{A} = \mathcal{I}(F, V_0)$ ist eine sig-Algebra.

b) Sei $u = v$ in E, zu zeigen $\mathcal{A} \models u = v$.
Sei φ : Term$(F, V) \to \mathcal{A}$ eine Evaluierungsfunktion.
Zu zeigen: $\varphi(u) = \varphi(v)$ in $\mathcal{A}$.
Wegen $u = v$ in E gilt $[\sigma(u)] = [\sigma(v)]$ für jedes σ.
Lemma 3.2 liefert also

$$\varphi(u) = [\sigma_\varphi(u)] = [\sigma_\varphi(v)] = \varphi(v) \text{ in } \mathcal{A}$$

Initiales Modell: 1. Beispiel

Sei

$$\begin{array}{ll} \mathsf{spec} = (\mathsf{sig}, E) & S = \{\mathsf{NAT}\} \quad F = \{0, +\} \\ E : x + 0 = x & x + (y + z) = (x + y) + z \end{array}$$

Es gilt

$t =_E 0$ für alle $t \in \mathsf{Term}(F)$.

$I(\mathsf{spec})$ hat nur ein Element: $[0]$

$$[0] \hat{+} [0] = [0]$$

Also

$x + y = y + x$ gilt in $I(\mathsf{spec})$.

Initiales Modell: 2. Beispiel

Sei

$$\begin{array}{ll} \mathsf{spec}' = (\mathsf{sig}', E) & S' = \{\mathsf{NAT}\} \quad F' = \{0, 1, +\} \\ E : x + 0 = x & x + (y + z) = (x + y) + z \end{array}$$

Es gilt

$I(\mathsf{spec}) = \{\underline{n}, \overline{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\} \cup \{\overline{0}\}$

mit $\underline{n} = [(\cdots((1 + 1) + 1) + \cdots + 1) + 1]$
$\overline{n} = [(\cdots((0 + 1) + 1) + \cdots + 1) + 1]$

$\underline{n} \hat{+} \underline{m} = \underline{n + m}$ $\qquad$ $\overline{n} \hat{+} \underline{m} = \overline{n + m}$

$\underline{n} \hat{+} \overline{m} = \underline{n + m}$ $\qquad$ $\overline{n} \hat{+} \overline{m} = \overline{n + m}$

$\rightsquigarrow x + y = y + x$ gilt nicht in $I(\mathsf{spec}')$.

Also

$I(\mathsf{spec})$ hängt nicht nur von E ab, sondern auch von sig.

Initiales Modell und E-Gleichheit

Satz 3.2.

Sei spec $=$ (sig, E).

$s = t$ gilt in I(spec) gdw
$\sigma(s) =_E \sigma(t)$ für jede Grundsubstitution σ.

Beweis-Skizze: Beachte Lemma 3.2.

„$\curvearrowright$“: Gegeben σ, zu zeigen $\sigma(s) =_E \sigma(t)$.

Sei $\varphi = \varphi_\sigma$	$\rightsquigarrow \varphi(s) = \varphi(t)$	nach Vor.
	$\rightsquigarrow [\sigma(s)] = [\sigma(t)]$	nach Lemma 3.2
	$\rightsquigarrow \sigma(s) =_E \sigma(t)$	

„$\curvearrowleft$“: Gegeben φ, zu zeigen $\varphi(s) = \varphi(t)$.

Sei $\sigma = \sigma_\varphi$	$\rightsquigarrow \sigma(s) =_E \sigma(t)$	nach Vor.
	$\rightsquigarrow [\sigma(s)] = [\sigma(t)]$	
	$\rightsquigarrow \varphi(s) = \varphi(t)$	nach Lemma 3.2

Der Satz von Birkhoff

Satz 3.3.

Sei spec $=$ (sig, E). Es gilt $E \models s = t \;\mathrm{gdw}\; E \vdash s = t$.

Beweis-Skizze:

$\mathcal{A}_0 = \mathcal{I}(F, V)/{=_E}$ ist Modell von spec

$E \vdash u = v \quad \mathrm{gdw}\; u =_E v \;\mathrm{gdw}\; [u] = [v]$
$\qquad\qquad\quad \mathrm{gdw}\; u = v$ gilt in $\mathcal{A}_0$

„$\curvearrowright$“: $E \models s = t \;\rightsquigarrow\; s = t$ gilt in $\mathcal{A}_0 \rightsquigarrow E \vdash s = t$.

„$\curvearrowleft$“:

a) $u = v$ in E, σ Substitution
$\rightsquigarrow \sigma(u) = \sigma(v)$ gilt in allen $\mathcal{A} \in$ Mod(spec).

b) $E \models u = v, p \in O(t)$
$\rightsquigarrow E \models t[p \leftarrow u] = t[p \leftarrow v]$.

c) $s \longmapsto\!\dashv_E t$
$\rightsquigarrow s = t$ gilt in allen $\mathcal{A} \in$ Mod(spec).

d) $E \vdash s = t \rightsquigarrow s =_E t$
$\rightsquigarrow s = t$ gilt in allen $\mathcal{A} \in$ Mod(spec) (nach c)).
$\rightsquigarrow E \models s = t$.

Gleichungstheoreme/induktive Theoreme

Sei spec $= (\text{sig}, E)$
sig $= (S, F, \tau)$

Definition 3.11

$$Th(E) = \{s = t \mid E \models s = t\}$$

$$ITh(E) = \{s = t \mid s = t \text{ gilt in } I(\text{spec})\}$$

Also

1. $s = t$ in $Th(E)$
   gdw $s =_E t$,
   gdw $s = t$ gilt in allen Modellen von spec
   (Satz von Birkhoff).
2. $s = t$ in $ITh(E)$
   gdw $s = t$ gilt im initialen Modell,
   gdw $s = t$ gilt in allen termerzeugten Modellen von spec
   (ohne Beweis).
3. $Th(E) \subseteq ITh(E)$.

Beispiele

Sei $S = \{\text{NAT}\}, \quad F = \{0, s\}$
$E : s(s(0)) = 0$

a) $I(\text{spec})$ hat 2 Elemente: $[0], [s(0)]$
   $s(s(x)) = x$ gilt in $ITh(\text{spec})$,
   denn σ Grundsubstitution $\rightsquigarrow \sigma(x) \equiv s^i(0)$

$$\sigma(s(s(x))) \equiv s(s(s^i(0)) =_E s^i(0) \equiv \sigma(x)$$

b) $s(s(x)) = x$ gilt nicht in $Th(\text{spec})$,
   denn $\mathcal{A} = (\{0, 1, a\}, \{\hat{0}, \hat{s}\})$

$$\hat{0} = 0 \qquad \begin{array}{l} \hat{s}(0) = 1 \\ \hat{s}(1) = 0 \\ \hat{s}(a) = 0 \end{array}$$

ist Modell von spec,
aber $\hat{s}(\hat{s}(a)) = 1 \neq a$ in $\mathcal{A}$.

3.3 Termersetzungssysteme

3.3.1 Regelsysteme R und $\longrightarrow_R$

Eigenschaften von

Termersetzung – Stellen
iterierte Termersetzung $t[p \leftarrow u][q \leftarrow v]$
Termersetzung – Substitutionen

$\Rightarrow$ einfach
siehe Buch.

Beispiele

$t[p \leftarrow u]/pq \equiv u/q$

$t[p \leftarrow u][q \leftarrow v] \equiv t[q \leftarrow v][p \leftarrow u]$, falls $p \mid q$

$\sigma(t[p \leftarrow u]) \equiv \sigma(t)[p \leftarrow \sigma(u)]$

Regelsysteme + Reduktionsrelationen

Sei sig $= (S, F, \tau)$ $\quad V = \bigcup_{s \in S} V_s$

Definition 3.12

Eine **Regel** hat die Form

$l \to r$ mit $l, r \in \mathrm{Term}_s(F, V)$,
$\mathrm{Var}(r) \subseteq \mathrm{Var}(l), l \notin V$.

Ein **Regelsystem** ist

R= Menge von Regeln.

Die **Reduktions-Relation zu** R ist

$s \longrightarrow_R t$ gdw es gibt $l \to r$ in R,
$p \in O(s)$ und $\sigma : s/p \equiv \sigma(l)$,
so dass $t \equiv s[p \leftarrow \sigma(r)]$.

Lemma 3.3

a) $s \longrightarrow_R t \rightsquigarrow \sigma(s) \longrightarrow_R \sigma(t)$
b) $s \longrightarrow_R t \rightsquigarrow t_0[p \leftarrow s] \longrightarrow_R t_0[p \leftarrow t]$
c) $\stackrel{*}{\longleftrightarrow}_R \; = \; =_R$

Also:

a) $\longrightarrow_R$ ist verträglich mit Substitutionen.
b) $\longrightarrow_R$ ist verträglich mit der Termstruktur.

Entscheidbarkeitsfragen

Probleme

Gegeben: R über sig (endlich).

Fragen: a) Ist $\longrightarrow_R$ terminierend?
b) Ist $\longrightarrow_R$ konfluent?
c) Für Terme s, t: Gilt $s =_R t$?

Satz 3.4.

Die Probleme a)-c) sind unentscheidbar.

Fragen

1. Hinreichende Bedingung an R für Termination/Konfluenz?
2. Für welche Teilklasse von Regelsystemen ist die Termination (Konfluenz) entscheidbar?

Termination (1)

Eine hinreichende Bedingung für die Termination.

Lemma 3.4

Sei R ein Regelsystem, so dass für alle $l \to r$ in R

1. $|l| > |r|$,
2. $|l|_x \geq |r|_x$ für alle $x \in \mathsf{Var}(l)$.

Dann ist R terminierend.

Beweis-Idee: $s \longrightarrow_R t \rightsquigarrow |s| > |t|$

Frage

Braucht man Voraussetzung 2.? JA!

Beispiel

$R : f(g(x), y) \to f(y, y)$

$\rightsquigarrow$ es gilt 1., aber nicht 2.

$$f(g(a), g(a)) \longrightarrow_R f(g(a), g(a))$$

R **nicht** terminierend.

Termination (2)

Lemma 3.5

Für jedes R gilt 1. gdw 2.:

1. R ist nicht terminierend.
2. Es gibt eine unendliche Kette $t_0 \longrightarrow_R t_1 \longrightarrow_R t_2 \cdots$ mit $t_0 \equiv \sigma(l)$, $l \to r$ in R, σ Grundsubstitution.

Definition 3.13

a) R heißt ein Grundregelsystem, falls für jede Regel $l \to r$ in R gilt: l, r sind Grundterme.

b) R heißt **rechts variablenfrei**, falls für jede Regel $l \to r$ in R gilt: r ist ein Grundterm.

Folgerung Sei R rechts variablenfrei.

R ist genau dann nicht terminierend, wenn es eine unendliche Kette $t_1 \longrightarrow_R t_2 \longrightarrow t_3 \longrightarrow \cdots$ gibt mit $t_1 \equiv r$, $l \to r$ in R.

Termination (3)

Lemma 3.6

Sei R (endlich) und rechts variablenfrei. Dann gilt i) gdw ii):

i) R ist nicht terminierend.

ii) Es gibt $l \to r$ in R und einen Term t mit $r \xrightarrow{+}_R t$ und r ist Teilterm von t.

Satz 3.5.

Das folgende Problem ist entscheidbar:

Eingabe: R, rechts variablenfrei.

Frage: Ist R terminierend?