Multimengenerweiterung: Motivation

Ein Spiel

Es gibt:

- großen Topf T,
- zu jedem $i \in \mathbb{N}$ viele Kugeln mit Marke i.

Zug:

- Wähle größte Kugel aus T.
- Ersetze sie durch beliebig viele kleinere Kugeln.

Frage: Hält das Spiel?

z. B. Sei $a_1 = 1$, $a_{i+1} = 2^{a_i}$ für $i > 1$.
Ersetze im i-ten Zug eine Kugel mit Marke k durch a_i Kugeln der Marke $k - 1$.

k^n stehe für n Kugeln mit Marke k,

dann $\{100^1\} \to \{99^1\} \to \{98^2\} \to \{98^1, 97^4\}$

$$\to \{97^{4+16}\} \to \{97^{19}, 96^{65.536}\}$$

$$\to \{97^{18}, 96^{65.536+2^{65.536}}\}$$

$$\to \cdots$$

Antwort: Das Spiel hält! (wieso?)

Multimengenerweiterung: Multimengen

Definition 2.10

Eine **Multimenge** über M ist

- informell: endliche Menge mit mehrfach auftretenden Elementen.
  z. B. $M = \mathbb{N}$ $A = \{0, 1, 1, 5, 7, 7, 7, 11, 11\}$
- formal: $A : M \to \mathbb{N}$ mit $\{m \mid A(m) \neq 0\}$ ist endlich.
  Sei Mult(M) das System aller Multimengen über M,
  z. B. $M = \mathbb{N}$ A wie oben.

$$A(0) = A(5) = 1$$
$$A(1) = A(11) = 2$$
$$A(7) = 3$$
$$A(m) = 0 \text{ sonst.}$$

- $A \cap B$: $A \cap B(m) = \min\{A(m), B(m)\}$
  $A \cup B$: $A \cup B(m) = A(m) + B(m)$
  $A - B$: $A - B(m) = \max\{0, A(m) - B(m)\}$

Multimengenerweiterung: Definition der Ordnung

Definition 2.11

Sei $>$ Partial-Ordnung auf M.

Setze $\gg$ auf Mult(M).

$$A \gg B \text{ gdw } \exists X, Y \in \text{Mult}(M):$$
$$\varnothing \neq X \subseteq A,\ B = (A - X) \cup Y$$
$$\forall y \in Y : \exists x \in X : x > y$$

„Ersetze $X \subseteq A$ durch Y, falls jedes $y \in Y$ durch ein $x \in X$ majorisiert wird“.

Beispiel

$(M, \geq) = (\mathbb{N}, \geq)$

$$\{1, \underline{5}, 5\} \gg \{1, \underline{1}, \underline{2}, 2, 2, 4, \underline{5}\}$$
$$\gg \{1, 2, 2, 3, \underline{3}, \underline{4}, \underline{4}, \underline{4}, \underline{4}, \underline{4}\}$$
$$\gg \{1, 2, 2, 3\}$$

X aus der Definition besteht jeweils aus den $\underline{i}$.

Effizienter Test für „$A \gg B$?“

Test

Eingabe: A, B Frage: Gilt $A \gg B$?

Streichen gleicher Elemente führe zu A', B'.
Ausgabe JA gdw zu jedem $y \in B'$ gibt es $x \in A'$ mit $x > y$.

Beispiel

$M = \{a, b\}^*$

$x > y \text{ gdw } |x|_a \geq |y|_a \wedge |x|_b > |y|_b$

$A = \{a^2b^3, b^5a, a\}$

a) $B = \{b^2, b^5a\}$
Dies liefert $A' = \{a^2b^3, a\}$, $B' = \{b^2\}$, also $A \gg B$.

b) Sei $A \subseteq B$, $A \neq B$
Dies liefert $A' = \varnothing$, $B' = B - A$, also $B \gg A$.

c) $B = \{b^3a, a^4b^4\}$
Dies liefert $A' = A$, $B' = B$ und A, B unvergleichbar.

Beachte

Aus $A \subseteq B$, $A \neq B$ folgt $B \gg A$.

Multimengenerweiterung: Resultate

Sei

$$A \mapsto B \text{ gdw } \exists a \in A, b_1, \ldots, b_n \in M: \quad \begin{array}{l} B = (A - \{a\}) \cup (b_1, \ldots, b_n\} \\ a > b_i \end{array}$$

Lemma 2.7

a) $A \gg B$ gdw $A \stackrel{+}{\mapsto} B$.

b) $\gg$ ist eine Partialordnung.

c) $\{m_1\} \gg \{m_2\}$ gdw $m_1 > m_2$.

d) $A \gg B \leadsto A \cup C \gg B \cup C$.

e) $>$ total auf $M \leadsto \gg$ total auf Mult(M).

Satz 2.8.

$>$ ist Noethersche Partialordnung auf M gdw
$\gg$ ist Noethersche Partialordnung auf Mult(M).

Beweisidee zu Satz 2.8.

„$\curvearrowleft$“: Dies folgt aus Teil c) des Lemmas.

„$\curvearrowright$“: $\gg$ ist Partialordnung nach Teil b) des Lemmas.

Zu zeigen bleibt: $\gg$ ist Noethersch

Annahme: $A_1 \gg A_2 \gg A_3 \gg \cdots$ ist unendliche Kette.

Konstruiere Bäume T_i mit Knoten aus M, so dass:

- A_i= Multimenge der Blätter von T_i.
- A_i hat nur $>$-absteigende Äste, d. h.

  $$\begin{array}{l} m \\ \quad\diagdown \\ \qquad m' \end{array} \qquad \leadsto m > m'$$
- T_i ist endlich verzweigend.
- $||T_i|| > ||T_{i-1}||$.

Setze T = Limes der T_i.

$\leadsto$ T ist unendlich, endlich verzweigend.

$\leadsto$ T hat unendlichen Ast (Lemma von König).

$\leadsto$ Es gibt unendliche Kette $m_1 > m_2 > m_3 > \cdots$

$\leadsto$ ↯

Multimengenerweiterung: Anwendungen

- Konstruktion sehr mächtiger Ordnungen.
  Im Spiel:
  Sei T_i=Topf zur Zeit i.
  Es gilt $T_i \gg T_{i+1}$
  Also: Das Spiel hält.

- Die Konstruktion ist iterierbar:
  $>_0$ gegeben
  Setze $>_1 \; = \; >_0 >_0 = \gg_0$

  $>_2 \; = \; \gg_1 \; \cdots$

- Später: Konstruktion von Noetherschen Ordnungen auf
  (a) Termen,
  (b) Beweisen,
  (c) Mengen von Gleichungen, ...

2.4 Konstruktion von konvergenten Reduktionssystemen

Probleme

Gegeben: $\sim$ Äquivalenzrelation auf $\mathcal{E}$,
lokal definiert durch $\vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv$,
also $\sim \; = \; \overset{*}{\vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv}$.

Gesucht: Reduktionsrelation $\longrightarrow$ mit
$\sim \; = \; \overset{*}{\longleftrightarrow}$
$\longrightarrow$ ist konfluent
$\longrightarrow$ ist terminierend

Idee

Inferenzsystem $\mathcal{B}$ arbeitet auf Paaren $(\longrightarrow_i, \vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv_i)$,

also $(\vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv_i, \longrightarrow_i) \underset{\mathcal{B}}{\vdash} (\vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv_{i+1}, \longrightarrow_{i+1})$
$i = 0, 1, \ldots$ mit
$\vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv_0 \; = \; \vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv, \longrightarrow_0 \; = \varnothing$

Ziel: $(\vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv_0, \longrightarrow_0) \underset{\mathcal{B}}{\overset{*}{\vdash}} (\varnothing, \longrightarrow)$

Angabe von

- Inferenzregeln (erlaubte Schritte),
- minimaler Kontrolle.