Konfluenz: Beispiele

1\. $\mathcal{E} = \mathbb{N}$ $\quad \longrightarrow: n \longrightarrow \frac{n}{2} \quad n \longrightarrow \frac{3}{4}n,\ n > 0$

$\longrightarrow$ nicht konfluent

$$\begin{tikzcd} & 4 \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\ 2 & & 3 \end{tikzcd}$$

2\. $\mathcal{E} = \{a, b\}^*$ $\quad \longrightarrow$ definiert durch $R : ba \to ab$

$\longrightarrow$ ist konfluent

$\longrightarrow$ ist CR

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\ x \arrow[dr, "*"'] & & y \arrow[dl, "*"] \\ & z & \end{tikzcd}$$

$z = a^i b^j$

$i = |u|_a,\ j = |u|_b$

Konfluenz: Beispiele (Forts.)

3\. $\mathcal{E} = \{a, b\}^*$ $\quad \longrightarrow$ definiert durch $aba \to \lambda$, $b^2 \to \lambda$

$\longrightarrow$ nicht konfluent

$\longrightarrow$ nicht CR

$$\begin{tikzcd} & \underline{a\,b\,a}\overline{\vphantom{a}b\,a} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ b\,a & & a\,b \end{tikzcd}$$

4\. $\mathcal{E} = \{a, b, c, d\}$ $\quad \longrightarrow: a \longleftarrow b \leftrightarrows c \longrightarrow d$

$\longrightarrow$ ist lokal konfluent

$\longrightarrow$ ist nicht konfluent

$\longrightarrow$ ist nicht CR

$\longrightarrow$ ist nicht terminierend

Konfluenz - CR-Eigenschaft

Satz 2.4.

Sei $(\mathcal{E}, \longrightarrow)$.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) $\longrightarrow$ ist konfluent.
2) $\longrightarrow$ ist einseitig lokal konfluent.
3) $\longrightarrow$ hat CR-Eigenschaft.

Beweis: Übung

Zeige $1) \leadsto 2) \leadsto 3) \leadsto 1)$

Lemma 2.3

Sei $\longrightarrow$ konfluent. Sei $x \overset{*}{\longleftrightarrow} y$.

a) Ist y irreduzibel, so gilt $x \overset{*}{\longrightarrow} y$.
b) Sind x, y irreduzibel, so gilt $x \equiv y$.
c) Jedes u hat höchstens eine NForm.

Beweis: Übung

Konvergenz

Sei $(\mathcal{E}, \longrightarrow)$ ein Reduktionssystem.

$\longrightarrow$ heißt **konvergent**, falls

- $\longrightarrow$ ist konfluent und
- $\longrightarrow$ ist terminierend.

Lemma 2.4

Sei $\longrightarrow$ konvergent.

a) Jedes u hat genau eine NForm $u\downarrow$
b) $x \overset{*}{\longleftrightarrow} y \text{ gdw } x\downarrow \equiv y\downarrow$

Beweis: Übung

Konfluenz - lokale Konfluenz

Beachte

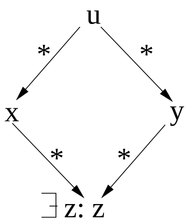
a) $\longrightarrow$ konfluent $\curvearrowright$ $\longrightarrow$ lokal konfluent

b) $\longrightarrow$ konfluent $\not\curvearrowleft$ $\longrightarrow$ lokal konfluent

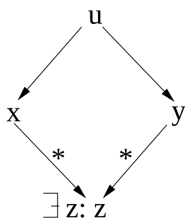
Satz 2.5. (Newman-Lemma)

Sei $\longrightarrow$ terminierend. Dann gilt

$\longrightarrow$ ist konfluent gdw $\longrightarrow$ ist lokal konfluent.



gdw



Beweis: Noethersche Induktion. Setze

$P(u)$ gdw $\forall x, y : x \xleftarrow{*} u \xrightarrow{*} y \leadsto x \downarrow y$

$u \geq v$ gdw $u \xrightarrow{*} v$

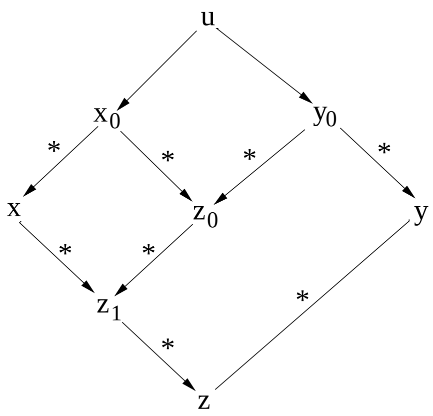
Dann: $\geq$ **ist** Noethersche Partialordnung.

Beweis zum Newman-Lemma

Sei $x \xleftarrow{*} u \xrightarrow{*} y$

a) Sei $x = u$ oder $y = u$. Dann gilt $x \downarrow y$

b) Sonst gibt es x_0 und y_0 mit $u \longrightarrow x_0 \xrightarrow{*} x$ und $u \longrightarrow y_0 \xrightarrow{*} y$. Es ergibt sich



z_0, z_1, z existieren, denn

z_0: $\longrightarrow$ ist lokal konfluent.

z_1: Induktions-Voraussetzung mit x_0.

z : Induktions-Voraussetzung mit y_0.

Konfluenz ohne Termination

Definition 2.5

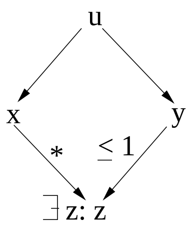
$\xrightarrow{\leq 1}$: $\quad x \xrightarrow{\leq 1} y \text{ gdw } x = y$ oder $x \longrightarrow y$

$\longrightarrow$ heißt **streng konfluent**

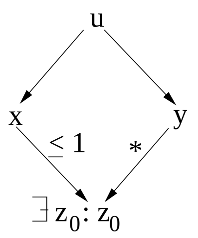
$\quad \text{gdw } \longleftarrow \circ \longrightarrow \subseteq \xrightarrow{*} \circ \xleftarrow{\leq 1}$

$\quad \text{gdw}$ aus $x \longleftarrow u \longrightarrow y$ folgt $\exists z : x \xrightarrow{*} z \xleftarrow{\leq 1} y$

Im Bild



und



Satz 2.6.

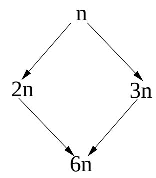
Sei $\longrightarrow$ streng konfluent.

Dann ist $\longrightarrow$ konfluent.

Beispiele zu strenger Konfluenz

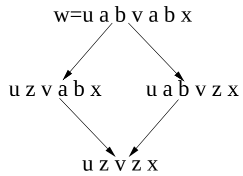
a) $\mathcal{E} = \mathbb{N} \qquad \longrightarrow: n \longrightarrow 2n \quad n \longrightarrow 3n$

$\quad \rightsquigarrow \longrightarrow$ ist streng konfluent, denn



b) $\mathcal{E} = \{a, b\}^* \quad R : ab \to z \qquad z \in \Sigma^*$

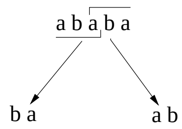
$\quad w \in \Sigma^*$ enthalte ab 2-mal. Dann gilt



Also: $\longrightarrow$ ist streng konfluent.

c) $\mathcal{E} = \Sigma^* \qquad R : aba \to \lambda \qquad \Sigma = \{a, b\}$

Es gilt



Also: $\longrightarrow$ ist nicht konfluent.

Konfluenz: Modularität

Sei $\longrightarrow \; = \; \longrightarrow_1 \cup \longrightarrow_2$
$\longrightarrow_1, \longrightarrow_2$ konfluent.

Frage: Wann ist $\longrightarrow$ konfluent?

Antwort: I. Allg. ist $\longrightarrow$ nicht konfluent.
JA, falls $\longrightarrow_1, \longrightarrow_2$ „kommutieren".

Beispiel

$\mathcal{E} = \{a, b, c\}$

a) $\longrightarrow_1$: $a \to b$ $\qquad \longrightarrow_2$: $a \to c$
Dann: $\longrightarrow$ ist nicht konfluent.

b) $\longrightarrow_1$: $a \to b$ $\qquad \longrightarrow_2$: $c \to a$
Dann: $\longrightarrow$ ist konfluent.

Kommutierende Relationen

Definition 2.6

$\longrightarrow_1, \longrightarrow_2$ kommutieren (lokal)

$\text{gdw } {}_1\xleftarrow{*} \circ \xrightarrow{*}_2 \subseteq \xrightarrow{*}_2 \circ {}_1\xleftarrow{*}$

$(\text{gdw } {}_1\longleftarrow \circ \longrightarrow_2 \subseteq \xrightarrow{*}_2 \circ {}_1\xleftarrow{*})$

Im Bild

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dl, "*"', "1"] \arrow[dr, "*", "2"'] & \\ x \arrow[dr, "*", "2"'] & & y \arrow[dl, "*"', "1"] \\ & \exists z: z & \end{tikzcd} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{tikzcd} & u \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "2"] & \\ x \arrow[dr, "*", "2"'] & & y \arrow[dl, "*"', "1"] \\ & \exists z: z & \end{tikzcd}$$

Satz 2.7.

Sei $\longrightarrow \; = \; \longrightarrow_1 \cup \longrightarrow_2$

a) Kommutieren $\longrightarrow_1$ und $\longrightarrow_2$ lokal und ist $\longrightarrow$ terminierend, so kommutieren $\longrightarrow_1$ und $\longrightarrow_2$.

b) Sind $\longrightarrow_1$ und $\longrightarrow_2$ konfluent und kommutieren sie, so ist $\longrightarrow$ konfluent.

Beispiel: kommutierende Relationen

$\mathcal{E} = \Sigma^* \qquad \Sigma = \{a, b\}$

a) $R_1 : aa \to x$
$R_2 : bab \to y$
Dann: w enthält aa und bab, falls $w_1 \; {}_1\!\longleftarrow w \longrightarrow_2 w_2$.
Also:

$$\begin{tikzcd} & w=u\,a\,a\,v\,b\,a\,b\,z \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "2"] & \\ u\,x\,v\,b\,a\,b\,z \arrow[dr, "2"'] & & u\,a^2\,v\,y\,z \arrow[dl, "1"] \\ & u\,x\,v\,y\,z & \end{tikzcd}$$

oder $w=u\,b\,a\,b\,v\,a^2\,z$

Also: $\longrightarrow_1, \longrightarrow_2$ kommutieren lokal.

b) $R_1 : aa \to \lambda$
$R_2 : bb \to b^5$
Dann: $\longrightarrow_i$ sind nicht beide terminierend, aber konfluent.
$\longrightarrow_1, \longrightarrow_2$ kommutieren.
Und: $\longrightarrow \; = \; \longrightarrow_1 \cup \longrightarrow_2$ ist konfluent, nicht terminierend.

2.3 Termination
Noethersche Partialordnungen

1. **Beispiel**: $\mathcal{E} = \{a, b\}^*$

$$R : ab^2a \to a^3 \qquad a^2 \to ab$$

Setze $x > y$ gdw $|x| > |y|$ oder
$|x| = |y|$, $|x|_a > |y|_a$
gdw $x >_1 y$ oder
$x \approx_1 y, x >_2 y$

Dies ist die lexikographische Kombination von $>_1, >_2$.
Es gilt $\longrightarrow_R \subseteq >$ und $>$ ist Noethersch.
Also $\longrightarrow_R$ ist terminierend.

2. **Beispiel**: $\mathcal{E} = \{a, b\}^*$

$$R : b^2 \to a^3 \qquad ab \to ba^2$$

Gesucht: Noethersche Ordnung $>$ mit $\longrightarrow_R \subseteq >$.
Beachte: Beide Regeln sind verlängernd.

$$ab^n \xrightarrow{k-1}_R b^n a^k \qquad k = 2^n$$

Termination/Ordnungen

3. **Beispiel**: $\mathcal{E} = \mathbb{N}$

$$n \to m \text{ gdw } m = \frac{9}{2}n \text{ oder } m = \frac{7}{3}n$$

z. B. $4 = 2^2 \longrightarrow 2 \cdot 3^2 \longrightarrow 2 \cdot 3 \cdot 7 \longrightarrow 2 \cdot 7^2$
$\longrightarrow 3^2 \cdot 7^2 \longrightarrow 3 \cdot 7^3 \longrightarrow 7^4$

Idee: $\longrightarrow$ reduziert den Exponenten von 2 oder 3.

Setze

$n > m$ gdw $\exp_2(n) > \exp_2(m)$ oder
$\exp_2(n) = \exp_2(m), \exp_3(n) > \exp_3(m)$

Es gilt $\longrightarrow \subseteq >$
$>$ ist Noethersche Partialordnung.

Also $\longrightarrow$ terminiert.

Konstruktion von Noetherschen Partialordnungen

Beispiel: $\mathcal{E} = \{a, b\}^*$

a) $x > y$ gdw $|x| > |y|$
b) $x > y$ gdw $|x|_a > |y|_a$
c) $x > y$ gdw $|x| > |y|$ oder
$|x| = |y|$, $|x|_a > |y|_a$

c) ist **lexikographische Kombination** von a) und b).

Definition 2.7

$\gtrsim$ ist **Quasiordnung** auf M, falls

- $\gtrsim$ ist reflexiv,
- $\gtrsim$ ist transitiv.

Setze

$u \approx v$ gdw $u \gtrsim v \wedge v \gtrsim u$ (Äquiv. Relation).

$u > v$ gdw $u \gtrsim v$, nicht $v \gtrsim u$ (strikter Anteil von $\gtrsim$).

$\gtrsim$ heißt **Noethersch**, falls $>$ Noethersch ist.

Lexikographische Kombination

Definition 2.8

Seien $\gtrsim_1$, $\gtrsim_2$ Quasiordnungen auf M.

Sei $u \gtrsim v$ gdw $u >_1 v$ oder
$u \approx_1 v$, $u \gtrsim_2 v$.

Dann ist $\gtrsim$ die **lexikographische Kombination** von $\gtrsim_1$ und $\gtrsim_2$.

Lemma 2.5

Seien $\gtrsim_1$, $\gtrsim_2$ (Noethersche) Quasiordnungen auf M. Dann ist $\gtrsim$ eine (Noethersche) Quasiordnung auf M.

Sind $\gtrsim_1$ und $\gtrsim_2$ Partial-Ordnungen, so ist auch $\gtrsim$ eine Partial-Ordnung.

Beispiel: $\mathcal{E} = \{a, b\}^*$

$u \gtrsim v$ gdw $|u|_a > |v|_a$ oder
$|u|_a = |v|_a$, $|u|_b > |v|_b$

also $a^5 > a^4b^i > \cdots > a^4b^2 > a^4b > a^4$
$> a^3b^j > \cdots > a^3b^2 > a^3b > a^3$
$> a^2b^k > \cdots > a^2b^2 > a^2b > a^2 > \cdots > a$

Produkt von Ordnungen

Definition 2.9

Seien $(M_1, \gtrsim_1)$, $(M_2, \gtrsim_2)$.

Setze $(M, \gtrsim)$ mit $M = M_1 \times M_2$.

$(u_1, u_2) \gtrsim (v_1, v_2)$ gdw $u_1 >_1 v_1$ oder
$u_1 \approx_1 v_1$, $u_2 \gtrsim_2 v_2$

Dann ist $(M, \gtrsim)$ das **Produkt** der $(M_i, \gtrsim_i)$.

Lemma 2.6

Seien $\gtrsim_1$, $\gtrsim_2$ (Noethersche) Quasi-Ordnungen. Dann ist auch $\gtrsim$ eine (Noethersche) Quasiordnung.

Beispiel

$(M_1, \gtrsim_1) = (M_2, \gtrsim_2) = (\mathbb{N}, \geq)$

also $(m_1, m_2) \gtrsim (n_1, n_2)$
gdw $m_1 > n_1$ oder
$m_1 = n_1, m_2 \geq n_2$

also
$$\begin{aligned} & (0,0) < (0,1) < (0,2) < \cdots \\ < & (1,0) < (1,1) < (1,2) < \cdots \\ < & (2,0) < (2,1) < (2,2) < \cdots \\ & \vdots \\ < & (n,0) < (n,1) < (n,2) < \cdots \end{aligned}$$