Aufgaben und Lösungshinweise

zur dritten schriftlichen Überprüfung zur Vorlesung Grundlagen der Programmierung vom 19. Juni 2000

Aufgabe 1 (1+3 Punkte)

a) Sei P ein PL-Programm mit den Eingabevariablen $X1, \ldots, Xn$ und Ausgabevariablen $Y1, \ldots, Ym$. Sei weiter $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$. Definieren Sie: »$P$ berechnet f«.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} z & \text{falls } x = 2^z \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases}$$

PL-berechenbar ist (durch Angabe eines PL-Programms). Sie dürfen Unterprogramme für Konstanten (1, 2, 3, ...), $\chi_=$, $\chi_\neq$ und die Multiplikation $*$ verwenden. Geben Sie die Idee Ihres Programms an und skizzieren Sie die Korrektheit Ihrer Lösung.

Aufgabe 2 (2+4 Punkte)

a) Definieren Sie den Operator R der primitiven Rekursion. Vergessen Sie nicht, die Stelligkeiten der Funktionen anzugeben.

b) Sei $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(x, y) = x + 3y$. Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{P}$ gilt, indem Sie eine genaue Herleitung angeben. Sie dürfen keine abgeleiteten Funktionen oder Operatoren verwenden. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 3 (1,5+3,5 Punkte)

a) Geben Sie die Definition der Ackermannfunktion $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ an.

b) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(x) = [A(x, x)/A(0, x)]$$

Zeigen oder widerlegen Sie: $f \in \mathcal{P}$. Sie dürfen alle Resultate aus der Vorlesung verwenden.

Lösungshinweise

1.a) vgl. Skript, S. 33, Definition 3.2.1, 1.

1.b) Behauptung: f ist PL-berechenbar

Idee formuliert als *while*-Programm mit Eingabevariable x_1, Ausgabevariable y_1:

$y_1 := 0;$
$u := 1;$
while $x_1 \neq u$ **do** Schleifeninvariante $u = 2^{y_1}$
    $y_1 := y_1 + 1;$
    $u := u * 2;$
end;

Beweis durch Angabe eines PL-Programms mit Eingabevariable X_1, Ausgabevar. Y_1:

$Y_1 \leftarrow 0;$
$U \Leftarrow 1;$
$V \Leftarrow 2;$
$L:$ $W \Leftarrow \chi_{\neq}(X_1, U);$ $\qquad W = \begin{cases} 1 & \text{falls } X_1 \neq U = 2^{Y_1} \\ 0 & \text{falls } X_1 = U = 2^{Y_1} \end{cases}$
loop W;
$Y_1 \leftarrow Y_1 + 1;$
$U \Leftarrow U * V;$
goto L;
end;

In jedem Schleifendurchlauf wird Y_1 um 1 erhöht und U verdoppelt, so dass wegen der Initialisierung von Y_1 mit 0 und von U mit $1 = 2^0$ folgende Schleifeninvariante gilt: $U = 2^{Y_1}$. Somit werden nacheinander alle Potenzen von 2 mit X_1 verglichen, bis $X_1 = U = 2^{Y_1}$ ist, sofern ein solches Y_1 exisitiert. Andernfalls terminiert die Berechnung nicht. Also berechnet das PL-Programm die Funktion f, womit die PL-Berechenbarkeit von f gezeigt ist.

2.a vgl. Skript, S.26, 2.8.3

2.b Behauptung: $f \in \mathcal{P}$

Beweis durch Angabe einer Herleitung:

$f_0 = \pi_1^1$	$f_0(x) = x$
$f_1 = \sigma$	$f_1(x) = x + 1$
$f_2 = f_1 \circ f_1$	$f_2(x) = x + 2$
$f_3 = f_1 \circ f_2$	$f_3(x) = x + 3$
$f_4 = \pi_3^3$	$f_4(x, y, z) = z$
$f_5 = f_3 \circ f_4$	$f_5(x, y, z) = z + 3$
$f_6 = R(f_0, f_5)$	

Hilfsbehauptung: $f_6(x, y) = x + 3y \quad (= f(x, y))$

Beweis durch vollständige Induktion nach y:

I.A. $y = 0$:

$$f_6(x, 0) = f_0(x) = x = x + 3 \cdot 0$$

I.S. $y \to y + 1$:

$$f_6(x, y+1) = f_5(x, y, f_6(x, y)) = f_6(x, y) + 3 \overset{\text{I.V.}}{=} (x + 3 \cdot y) + 3 = x + 3 \cdot (y + 1)$$

Also gilt die Hilfsbehauptung.

Da $\pi_1^1, \pi_3^3, \sigma \in \mathcal{P}$ und $\mathcal{P}$ abgeschlossen ist bzgl. Komposition und primitiver Rekursion, sind alle $f_i \in \mathcal{P} (i = 0, \ldots, 6)$. Da $f = f_6$ ist, gilt also $f \in \mathcal{P}$.

3.a vgl. Skript, S. 61, Definition 4.6.1

3.b Behauptung: $f \notin \mathcal{P}$

Beweis durch Widerspruch: Annahme $f \in \mathcal{P}$

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $g(x) = (f(x) + 1) \cdot (x + 1)$.

$\leadsto g \in \mathcal{P}$, da $f \in \mathcal{P}$ nach Annahme, $\sigma, \cdot \in \mathcal{P}$ und $\mathcal{P}$ abgeschlossen bzgl. Komposition und Parallelausführung.

$\overset{\text{Lemma}}{\leadsto}$ Es gibt ein $p \in \mathbb{N}$ mit $A(p, x) > g(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

Für $x = p$ gilt somit:

$$\begin{aligned} A(p,p) &> g(p) = (f(p)+1)\cdot(p+1) = ([A(p,p)/A(0,p)]+1)\cdot(p+1) \\ &= ([A(p,p)/(p+1)]+1)\cdot(p+1) \geq \frac{A(p,p)}{p+1}\cdot(p+1) \\ &= A(p,p) \qquad \text{Widerspruch!} \end{aligned}$$

Also ist die Annahme falsch, woraus die Behauptung folgt.