Aufgaben und Lösungshinweise

zur ersten schriftliche Überprüfung zur Vorlesung

Grundlagen der Programmierung

vom 25. April 2000

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei $f : A \to B$ eine Funktion. Geben Sie die Definitionen an für

a) f ist total,

b) f ist injektiv,

c) f ist surjektiv,

d) f ist bijektiv.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Definieren Sie mit Hilfe der üblichen mathematischen Operatoren auf $\mathbb{N}$ und *beschränkter* Quantifizierung folgende Prädikate auf $\mathbb{N}$ (ohne Beweis):

- $P(n)$ gdw n ist keine Potenz von 2
- $Q(n)$ gdw n ist die Summe von zwei Quadratzahlen

Aufgabe 3 (1+5 Punkte)

Gegeben sei folgender Kalkül K mit Ausgangsmenge $A = \{a, b\}^*$ und den Regeln:

$$\frac{}{\varepsilon} \qquad\qquad \frac{u \quad v}{uv} \qquad\qquad \frac{u}{aub}$$

1. Geben Sie eine Herleitung für $\vdash_K aababb$ an.
2. Zeigen Sie: Aus $\{ab, ba\} \vdash_K w$ folgt $|w|_a = |w|_b$.
   (Dabei bezeichne $|w|_a$ die Anzahl der a's in w und $|w|_b$ die Anzahl der b's in w.)

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Eine Menge M heißt *abzählbar*, falls es eine surjektive Funktion $g : \mathbb{N} \to M$ gibt.

Zeigen oder widerlegen Sie:

$$\mathcal{F} = \{f \mid f \text{ ist partielle Funktion von } \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ und injektiv}\}$$

ist abzählbar.

Lösungshinweise

1. vgl. Skript, S. 14

2. $P(n)$ gdw $\bigwedge_{m \leq n} \neg(2^m = n)$

   $Q(n)$ gdw $\bigvee_{m \leq n} \bigvee_{k \leq n} m^2 + k^2 = n$

3. 1. | | | |
      |---|---|---|
      | (i) | ε | mit 1. Regel |
      | (ii) | ab | mit 3. Regel und (i) |
      | (iii) | $abab$ | mit 2. Regel und (ii), (ii) |
      | (iv) | $aababb$ | mit 3. Regel und (iii) |

   2. Behauptung: Aus $\{ab, ba\} \vdash_K w$ folgt $|w|_a = |w|_b$.

      Beweis mit Induktion nach der Herleitung:

      Induktionsanfang: Betrachte die beiden Wörter ab und ba. Es gilt: $|ab|_a = 1 = |ab|_b$ und $|ba|_a = 1 = |ba|_b$.

      Induktionsschritt: 3 Fälle – einer pro Regel.

      - Der letzte Herleitungsschritt erfolgte mit der 1. Regel, also $w = \varepsilon$. Es gilt $|\varepsilon|_a = 0 = |\varepsilon|_b$.
      - Der letzte Herleitungsschritt erfolgte mit der 2. Regel, also $w = uv$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $|u|_a = |u|_b$ und $|v|_a = |v|_b$. Also gilt: $|w|_a = |uv|_a = |u|_a + |v|_a \stackrel{\text{I.V.}}{=} |u|_b + |v|_b = |uv|_b = |w|_b$.
      - Der letzte Herleitungsschritt erfolgte mit der 3. Regel, also $w = aub$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $|u|_a = |u|_b$. Also gilt: $|w|_a = |aub|_a = 1 + |u|_a \stackrel{\text{I.V.}}{=} 1 + |u|_b = |aub|_b = |w|_b$.

      Somit ist die Behauptung für alle w mit $\{ab, ba\} \vdash_K w$ gezeigt.

4. Behauptung: Die Menge $\mathcal{F}$ ist nicht abzählbar.

   Beweis mit Diagonalschluss.

   Annahme: $\mathcal{F}$ ist abzählbar. Dann gibt es eine surjektive Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathcal{F}$. Betrachte die Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

   $$h(n) = \begin{cases} n & \text{falls } (g(n))(n)\uparrow \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases}$$

   Aus $h(n) = h(m)$, also $n, m \in D(h)$, folgt $n = h(n) = h(m) = m$. Somit ist h injektiv und daher gilt $h \in \mathcal{F}$. Andererseits gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, dass $h(k) \neq (g(k))(k)$ (nach Definition h), im Widerspruch zur Surjektivität von g. Also ist die Annahme falsch und $\mathcal{F}$ ist nicht abzählbar.