# Bemerkung zum Entwickeln von Inferenzsystemen (2)

**Sei** $S$ eine Menge von Klauseln.
gnd$(S) = \{\sigma(C) \mid C \in S, \sigma(C)$ Grundinstanz von $C\}$.

**Beachte**

$S$ ist H-erfüllbar $\mathrm{gdw}$ gnd$(S)$ ist H-erfüllbar.

**Ziel**

Anpassen (liften) der Begriffe, so dass gilt

1. Ist $S$ saturiert bis auf Redundanz, so gilt:
   $S$ ist H-erfüllbar $\mathrm{gdw}\ \Box \notin S$.
2. Ist $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine faire $\mathcal{K}$-Ableitung, so gilt:
   $S_0$ ist H-unerfüllbar $\mathrm{gdw}\ \Box \in S_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

**Man muss** folgende Begriffe liften/definieren:

Die Ordnung auf Klauseln
Redundanz einer Klausel bzw. einer Inferenz
Saturiertheit bis auf Redundanz
Eine Grundinferenz ist liftbar
$\mathcal{K}$ ist monoton bzw. korrekt

**Es bleiben** folgende Begriffe unverändert:

$\Phi$ ist ein Modellfunktor
$\mathcal{K}$ hat die Verkleinerungseigenschaft für Gegenbeispiele



# Lifting: Die Ordnung auf Klauseln

**Sei** $\mathcal{K}$ ein Kalkül, der auf Klauseln (mit Variablen) arbeitet.

**Sei**

$\succ$ eine Reduktionsordnung auf den Termen, total auf den Grundtermen.

$\succ_l$ die induzierte Ordnung auf den Literalen:
comp$(s = t) = \{s, t\}$
comp$(\neg s = t) = \{s, s, t, t\}$
$l_1 \succ_l l_2\ \mathrm{gdw}$ comp$(l_1) \succ\!\!\succ$ comp$(l_2)$

$\succ_c$ die induzierte Ordnung auf Klauseln:
comp$(C) = \{$comp$(l) \mid l$ in $C\}$
$C \succ_c D\ \mathrm{gdw}$ comp$(C) \succ\!\!\succ_l$ comp$(D)$

**Es gilt**

Aus $s \succ t$ folgt $\sigma(s) \succ \sigma(t)$.

Aus $l_1 \succ_l l_2$ folgt $\sigma(l_1) \succ_l \sigma(l_2)$.

Aus $C \succ_c D$ folgt $\sigma(C) \succ_c \sigma(D)$.

Alle Ordnungen sind Noethersch und total auf den Grundobjekten.

## Inferenzen und Grundinferenzen

**Sei** $\mathcal{K}$ ein Inferenzsystem auf Klauseln,
$S$ eine Menge von Klauseln.

**Bemerkung**

Wir betrachten nur Inferenzsysteme $\mathcal{K}$ mit

(1) Jede $\mathcal{K}$-Inferenz $\pi$ hat die Form $\pi = \dfrac{C_1 \ldots C_n \quad C}{\tau(D_0)}$ ,
also Konklusion $D \equiv \tau(D_0)$.

(2) Sind die Prämissen Grundklauseln, so ist $\pi$ eine $\mathcal{GK}$-Inferenz.

Dann heißt $\mathcal{K}$ eine **Erweiterung** zu $\mathcal{GK}$.

**Bezeichnung**

Sei $\pi$ eine $\mathcal{K}$-Inferenz zu $S$ wie oben

a) Sind alle Klauseln in $\pi$ Grundklauseln, so ist $\pi$ eine $\mathcal{K}$-**Grundinferenz**.

b) $\sigma(\pi) :\equiv \dfrac{\sigma(\tau(C_1)) \ldots \sigma(\tau(C_n)) \quad \sigma(\tau(C))}{\sigma(\tau(D_0))}$

ist eine **Grundinstanz** zu $\pi$, falls alle Klauseln in $\sigma(\pi)$ Grundklauseln sind.



## Beispiel zu Inferenzen

**Sei** $\mathcal{K} = \mathcal{R}_{\succ}$ der Resolutionskalkül,
$\succ$ eine LPO.

Die Resolutionsregel lautet

$$\frac{A \vee C \quad \neg B \vee D}{\tau(C \vee D)} \qquad \begin{array}{l} \text{falls } \tau = \text{mgu}(A, B), \\ \tau(A) \text{ ist strikt maximal in } \tau(A \vee C), \\ \tau(\neg B) \text{ ist maximal in } \tau(\neg B \vee D). \end{array}$$

Dann ist $\pi$ eine $\mathcal{K}$-Inferenz:

$$\pi \equiv \frac{p(b,x) \quad \neg p(y,z) \vee \neg p(z,y)}{\tau(\neg p(z,y))} \qquad \tau = \{y \leftarrow b, z \leftarrow x\}$$

Beachte: $\tau(\neg p(z,y)) \equiv \neg p(x,b)$.

Sei $\sigma(x) \equiv t$. Für jeden Grundterm $t$ ist $\sigma(\pi)$ korrekt

$$\sigma(\pi) \equiv \frac{p(b,t) \quad \neg p(b,t) \vee \neg p(t,b)}{\neg p(t,b)}$$

Für $b \succeq t$ ist $\neg p(b,t) \succeq_l \neg p(t,b)$ und daher $\sigma(\pi)$ eine $\mathcal{K}$-Inferenz.

Für $t \succ b$ ist nicht $\neg p(b,t) \succeq_l \neg p(t,b)$, also ist $\sigma(\pi)$ **keine** $\mathcal{K}$-Inferenz.

## Lifting: Korrektheit und Monotonie von $\mathcal{K}$

### Intention

a) $\pi$ steht für alle Grundinstanzen $\sigma(\pi)$.

b) Nicht jedes $\sigma(\pi)$ ist eine $\mathcal{K}$-Grundinferenz, aber jedes $\sigma(\pi)$ ist korrekt.

c) Es sollen die Ergebnisse zu $\mathcal{GK}$ auf $\mathcal{K}$ übertragen werden.

### Beachte

Die Intention verlangt für jede Klauselmenge $S$:

a) Jede $\mathcal{K}$-Inferenz $\pi'$ zu gnd$(S)$ soll monoton sein.

b) Jede nicht-redundante $\mathcal{K}$-Inferenz $\pi'$ zu gnd$(S)$ soll zu einer $\mathcal{K}$-Inferenz $\pi$ zu $S$ „liftbar" sein.

c) Für jede $\mathcal{K}$-Inferenz $\pi$ ist jede Grundinstanz $\sigma(\pi)$ korrekt.

### Definition 4.26.

Eine $\mathcal{K}$-Inferenz $\pi$ heißt **korrekt**, falls alle Grundinstanzen $\sigma(\pi)$ korrekt sind.

$\mathcal{K}$ heißt **korrekt**, falls jede $\mathcal{K}$-Inferenz $\pi$ korrekt ist.

$\mathcal{K}$ heißt **monoton**, falls jede $\mathcal{K}$-Grundinferenz monoton ist.



## Lifting: Redundanz (1)

**Sei** $\mathcal{K}$ ein Inferenzsystem auf Klauseln,
$S$ eine Menge von Klauseln.

### Bezeichnug

$C \trianglerighteq D$, falls $\sigma(D) \equiv C$ für eine Substitution $\sigma$.
$C \approx D$, falls $C \trianglerighteq D$ und $D \trianglerighteq C$.
$C \vartriangleright D$, falls $C \trianglerighteq D$ und nicht $D \trianglerighteq C$.

### Beachte

a) $\vartriangleright$ ist eine Noethersche Partialordnung auf Klauseln.

b) Aus $C \trianglerighteq D$ folgt gnd$(C) \subseteq$ gnd$(D)$.

c) Aus $C \approx D$ folgt gnd$(C) =$ gnd$(D)$ und dass $C$ und $D$ bis auf Variablenumbenennung übereinstimmen. Wir identifizieren dann $C$ und $D$.

### Definition 4.27.

a) $C$ ist **redundant** bezüglich $S$, falls jedes $C' \in$ gnd$(C)$ bezüglich gnd$(S)$ redundant ist oder es ein $D \in S$ gibt mit $C \vartriangleright D$.
Sei $R(S) = \{C \mid C$ ist bezüglich $S$ redundant $\}$.

b) Eine $\mathcal{K}$-Inferenz $\pi$ zu $S$ ist **redundant**, falls jede Grundinstanz $\sigma(\pi)$, die eine $\mathcal{K}$-Inferenz ist, redundant ist.

# Lifting: Redundanz (2)

**Lemma 4.18**

a) Ist $C$ redundant bezüglich $S$, so ist $C$ auch redundant bezüglich $S - \{C\}$.

b) Für $S' = \text{gnd}(S)$ gilt $S' - R(S') \subseteq \text{gnd}(S - R(S))$. Also: Jede nicht-redundante Klausel in $\text{gnd}(S)$ ist Instanz einer nicht-redundanten Klausel in $S$.

Beweis:

a) Ist $C \rhd D$ für ein $D \in S$, so ist $D \in S - \{C\}$. Sei also jedes $C' \in \text{gnd}(C)$ redundant bezüglich $\text{gnd}(S)$. Induktion nach $\succ_c$ zeigt, dass dann jedes $C' \in \text{gnd}(C)$ redundant bezüglich $\text{gnd}(S - \{C\})$ ist.

b) Sei $T' = S' - R(S')$ und $T = S - R(S)$. Sei $C' \in T'$, also $C' \in \text{gnd}(C)$ für ein $C \in S$.
Sei $C \rhd D$ für kein $D \in S$. Wegen $C' \notin R(S')$ ist $C' \notin R(S)$.
Sei $C \rhd D$ für ein $D \in S$. Dann gibt es ein $\rhd$-minimales $D_1 \in S$ mit $C \rhd D_1$. Dann ist $C' \in \text{gnd}(C) \subseteq \text{gnd}(D_1)$ und $D_1 \rhd D_0$ für kein $D_0 \in S$. Wegen $C' \notin R(S')$ ist $D_1 \notin R(S)$.



# Beispiele zur Redundanz

**Beispiel 1**

Ist $C \in S$ und $\tau$ eine beliebige Substitution und $D \not\equiv \Box$, so ist $D \vee \tau(C)$ redundant bezüglich $S$.

Beweis: Sei $\sigma$ eine Grundsubstitution. Es ist $\sigma \circ \tau(C) \in \text{gnd}(S)$, $\sigma(D \vee \tau(C)) \succ_c \sigma \circ \tau(C)$ und $\sigma \circ \tau(C) \models \sigma(D \vee \tau(C))$. Also ist $\sigma(D \vee \tau(C))$ redundant in $\text{gnd}(S)$ und daher $D \vee \tau(C)$ redundant in $S$.

**Beispiel 2**

$S$ enthalte die Unit-Klauseln $g(a) = a$ und $g(x) = f(x)$. Sei $g(x) \succ f(x)$.
Sei

$$\pi_1 = \frac{g(a) = a \quad g(g(a)) = f(g(a))}{g(a) = f(g(a))}$$

$$\pi_2 = \frac{g(a) = a \quad g(a) = f(a)}{a = f(a)}$$

Beide Inferenzen sind korrekt.

$\pi_1$ ist redundant, denn $g(a) = a,\ g(a) = f(a) \models g(a) = f(g(a))$, also $\text{gnd}(S)_{g^2(a)=f(g(a))} \models g(a) = f(g(a))$.

$\pi_2$ ist i. Allg. nicht redundant. Gilt aber $a = f(a) \in \text{gnd}(S)$, so ist $\pi_2$ redundant, denn $g(a) = f(a) \succ_c a = f(a)$.

## Liftbare Inferenzen

**Definition 4.28.**

Eine $\mathcal{K}$-Inferenz $\pi'$ zu gnd$(S)$ heißt **liftbar**, falls es eine $\mathcal{K}$-Inferenz $\pi$ zu $S$ gibt, so dass $\pi'$ eine Grundinstanz zu $\pi$ ist. Wir sagen dann: $\pi'$ ist liftbar zu $\pi$.

$\mathcal{K}$ heißt **liftend**, falls für jedes $S$ gilt: Jede nicht-redundante $\mathcal{K}$-Inferenz $\pi'$ zu gnd$(S)$ ist liftbar zu einer $\mathcal{K}$-Inferenz $\pi$ zu $S$ mit nicht-redundanten Prämissen.

**Beispiel 2** (Fortsetzung)

Sei $\pi \equiv \quad \dfrac{g(a) = a \quad g(x) = f(x)}{\tau(a = f(x))} \quad \tau(x) = a$

Es sind $\pi_1$ und $\pi_2$ $\mathcal{K}$-Inferenzen zu gnd$(S)$.

$\pi_1$ ist nicht liftbar zu $\pi$.

$\pi_2$ ist liftbar zu $\pi$, es ist $\pi_2 = \sigma(\pi)$ mit $\sigma = $ id.

Beachte, dass $\pi_1$ redundant ist und dass nur nicht-redundante Grundinferenzen liftbar sein sollen.



## Lifting: $\mathcal{K}$-Saturiertheit

**Sei** $S$ eine Menge von Klauseln.

**Definition 4.29.**

$S$ heißt $\mathcal{K}$-**saturiert bis auf Redundanz**, falls $\mathcal{K}(S - R(S)) \subseteq \mathcal{K}_R(S)$ gilt.

**Lemma 4.19**

Ist $\mathcal{K}$ liftend und $S$ $\mathcal{K}$-saturiert bis auf Redundanz, so ist auch $S' = $ gnd$(S)$ $\mathcal{K}$-saturiert bis auf Redundanz.

Beweis:
Zu zeigen ist $\mathcal{K}(S' - R(S')) \subseteq \mathcal{K}_R(S')$.
Annahme: Es gibt $\pi' \in \mathcal{K}(S' - R(S'))$, $\pi' \notin \mathcal{K}_R(S')$.
Da $\pi'$ nicht redundant und $\mathcal{K}$ liftend ist, ist $\pi'$ zu einer $\mathcal{K}$-Inferenz $\pi$ mit nicht-redundanten Prämissen liftbar. Es gibt also eine $\mathcal{K}$-Inferenz zu $S$, so dass $\pi'$ eine Grundinstanz zu $\pi$ ist: $\pi' = \sigma(\pi)$.

$$\pi' = \quad \frac{C_1' \ldots C_n' C'}{D'} \qquad \pi = \quad \frac{C_1 \ldots C_n C}{\tau(D_0)}$$

mit $C_i' \equiv \sigma(\tau(C_i))$, $C' \equiv \sigma(\tau(C))$, $D' \equiv \sigma(\tau(D_0))$ und $C_i, C \in S - R(S)$. Da $S$ $\mathcal{K}$-saturiert ist, gilt $\pi \in \mathcal{K}_R(S)$.
Also ist $\pi' = \sigma(\pi) \in \mathcal{K}_R(S')$ nach Definition 4.27b). $\lightning$

## Das Hauptresultat für Klauseln

**Sei** $S$ eine Menge von Klauseln.
$\Phi$ ein Modellfunktor.
$\mathcal{K}$ ein Inferenzsystem auf Klauseln.
$\mathcal{K}(S)$ (bzw. $\mathcal{K}_R(S)$) die Menge der (redundanten) $\mathcal{K}$-Inferenzen zu $S$.

### Satz 4.15.

Hat $\mathcal{K}$ (bezüglich $\Phi$) die Verkleinerungseigenschaft für Gegenbeispiele, ist $\mathcal{K}$ liftend und ist $S$ $\mathcal{K}$-saturiert bis auf Redundanz, so gilt

$S$ ist H-erfüllbar $\mathrm{gdw}$ $\Box \notin S$.

Beweis:
Aus den Voraussetzungen folgt nach Lemma 4.19, dass gnd$(S)$ bis auf Redundanz $\mathcal{K}$-saturiert ist.

Also gilt mit Satz 4.12:
$S$ ist H-erfüllbar $\mathrm{gdw}$ gnd$(S)$ ist H-erfüllbar
$\mathrm{gdw}$ $\Box \notin$ gnd$(S)$ $\mathrm{gdw}$ $\Box \notin S$.

### Beachte

Nur nicht-redundante $\mathcal{K}$-Grundinferenzen $\pi'$ müssen zu einer $\mathcal{K}$-Inferenz $\pi$ mit nicht-redundanten Prämissen liftbar sein.



## $\mathcal{K}$-Ableitungen auf Klauseln

### Bemerkung

Nachdem der Redundanzbegriff auf Klauseln geliftet ist, ist klar, was eine Ableitung $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit Redundanz ist:

Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt (i) $S_{i+1} = S_i \cup \{D\}$ mit $S_i \models D$ oder
(ii) $S_{i+1} = S_i - \{C\}$ mit $C \in R(S_i)$.

Ist $\mathcal{K}$ korrekt und ist $D$ die Konklusion einer $\mathcal{K}$-Inferenz zu $S_i$, so gilt $S_i \models D$. Wir sprechen dann von einem $\mathcal{K}$-Schritt der Ableitung.

Seien $S_\infty$ und $S^\infty$ erklärt wie früher.

### Lemma 4.20

Sei $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine $\mathcal{K}$-Ableitung und sei $S'_i = $ gnd$(S_i)$. Dann gilt für alle $i \in \mathbb{N}$

a) $R(S_0) \subseteq R(S_i) \subseteq R(S^\infty) = R(S_\infty)$
$R(S'_0) \subseteq R(S'_i) \subseteq R(S'^\infty) = R(S'_\infty)$

b) $S'_0$ ist H-erfüllbar $\mathrm{gdw}$ $S'_i$ ist H-erfüllbar für alle $i \in \mathbb{N}$
$\mathrm{gdw}$ $S'_\infty$ ist H-erfüllbar.

c) $S_0$ ist H-erfüllbar $\mathrm{gdw}$ $S_\infty$ ist H-erfüllbar.