$\mathcal{H}$ ohne Constraints (Forts.)

Reflexiv-Resolution

$$\frac{\Gamma, s = t \Rightarrow \Delta}{\sigma(\Gamma) \Rightarrow \sigma(\Delta)} \quad \text{falls } \sigma = \text{mgu}(s,t) \text{ und } s = t \text{ ist markiert.}$$

Satz 4.11.

$\mathcal{H}'$ ist korrekt und vollständig für Horn-Klausel-Mengen S:

Es gilt $S \overset{*}{\underset{\mathcal{H}'}{\vdash}} \Box$ gdw S ist H-unerfüllbar.

4.3 Saturierung bis auf Redundanz

Ziel

Sei $\mathcal{K}$ ein abstrakter Kalkül, der auf Klauseln (nicht nur auf Horn-Klauseln) arbeitet.

a) Wir besprechen die zentralen Konzepte
   - Saturierung
   - Modellkonstruktion
   - Redundanz

b) Wir leiten hieraus Bedingungen für die Vollständigkeit von $\mathcal{K}$ ab.

Beachte

a) Wir suchen einen Kalkül, der
   1. sparsam ist, also wenig Inferenzschritte erzeugt und
   2. vollständig ist, also $S \overset{*}{\underset{\mathcal{K}}{\vdash}} \Box$ liefert, falls S unerfüllbar ist.

b) Wir instanziieren später $\mathcal{K}$ zum Superpositionskalkül für beliebige Klauseln.

c) Auch der Superpositionskalkül $\mathcal{H}_{\succ}$ für Horn-Klauseln ist (nach Verfeinerung) eine Instanz von $\mathcal{K}$.

Vorgehen

Erst Beschränkung auf Grundklauseln.

Dann Erweiterung auf beliebige Klauseln mit Lifting.

Erinnerung: Inferenzen und Modellfunktor

Sei S eine Menge von Grundklauseln,
$\succ_c$ eine totale Noethersche Ordnung auf den Grundklauseln.

Bezeichnungen

Eine **Inferenzregel** in $\mathcal{K}$ hat die Form

$$\frac{C_1 \ldots C_n \quad C}{D} \quad \text{falls Anwendungsbedingung}$$

Sei S eine Klauselmenge. Eine $\mathcal{K}$-**Inferenz** zu S ist eine Instanz

$$\pi = \frac{C_1 \ldots C_n \quad C}{D}$$

einer Inferenzregel aus $\mathcal{K}$ mit $\{C_1, \ldots, C_n, C\} \subseteq S$ und $C \succ_c C_i$. Es heißt C die **Hauptprämisse**, C_i eine **Nebenprämisse** und D die **Konklusion**. Wir schreiben auch con$(\pi) = D$. Die $\mathcal{K}$-Inferenz heißt **monoton**, falls $C \succ_c D$ gilt. $\mathcal{K}$ ist monoton, falls jede $\mathcal{K}$-Inferenz monoton ist.

Sei $\mathcal{K}(S)$ die Menge aller $\mathcal{K}$-Inferenzen zu S gilt.

S heißt **abgeschlossen unter** $\mathcal{K}$, falls con$(\mathcal{K}(S)) \subseteq S$.

Modellfunktor

Ein Modellfunktor Φ ordnet jeder Klauselmenge S ein Herbrandmodell $\Phi(S) = I_S$ zu. (Es braucht I_S kein Modell von S zu sein.)

Redundanz

Sei

S eine Menge von Grundklauseln und $S_C = \{D \in S \mid C \succ_c D\}$.

Definition 4.21.

Eine Grundklausel C heißt **redundant bezüglich** S, falls $S_C \models C$ gilt. C ist **redundant in** S, falls außerdem $C \in S$ gilt.

$R(S) = \{C \mid C$ ist redundant bezüglich $S\}$ ist die Menge der redundanten Klauseln bezüglich S.

Eine $\mathcal{K}$-Inferenz zu S

$$\frac{C_1 \ldots C_n \quad C}{D}$$

ist **redundant**, falls eine Prämisse redundant ist oder $S_C \models D$ gilt.

$\mathcal{K}_R(S)$ ist die Menge der redundanten $\mathcal{K}$-Inferenzen zu S.

Beachte

Ist C redundant in S, so gilt $S_C - R(S) \models C$.

Jedes Modell von $S - R(S)$ ist ein Modell von S.

Ist C redundant in S, so ist C kein minimales Gegenbeispiel zu I_S.

Saturiertheit bis auf Redundanz

Definition 4.22.

S heißt $\mathcal{K}$-**saturiert bis auf Redundanz**, falls $\mathcal{K}(S - R(S)) \subseteq \mathcal{K}_R(S)$ gilt, d. h., falls alle $\mathcal{K}$-Inferenzen mit nicht-redundanten Prämissen bezüglich S redundant sind.

Beachte

S heißt abgeschlossen unter $\mathcal{K}$, falls $\mathcal{K}(S) \subseteq S$ gilt. Die Forderung der Abgeschlossenheit ist sehr stark. Wir zeigen, dass die Saturiertheit bis auf Redundanz zur Herleitung der folgenden Ergebnisse ausreicht.

Lemma 4.14

Sei S $\mathcal{K}$-saturiert bis auf Redundanz. Dann ist auch $T = S - R(S)$ $\mathcal{K}$-saturiert bis auf Redundanz und jede $\mathcal{K}$-Inferenz zu T ist redundant.

Beweis:

Für jedes C und D gilt: Aus $S_C \models D$ folgt $T_C \models D$.

Sei $\dfrac{C_1 \ldots C_n \quad C}{D}$ eine $\mathcal{K}$-Inferenz zu T. Da S saturiert ist, gilt $S_C \models D$, also auch $T_C \models D$.

Hieraus folgt die Behauptung.

Verkleinerung von Gegenbeispielen

Beachte

Gilt $I_S \models S$, so ist S H-erfüllbar. Gilt $I_S \not\models S$, so gibt es ein $C \in S$ mit $I_S \not\models C$. Dann heißt C ein **Gegenbeispiel** zu I_S. Dann existiert auch ein (bezüglich $\succ_c$) minimales Gegenbeispiel zu I_S.

Definition 4.23.

$\mathcal{K}$ hat (bezüglich des Modellfunktors Φ) die **Verkleinerungseigenschaft für Gegenbeispiele**, falls gilt:

Ist S $\mathcal{K}$-saturiert bis auf Redundanz, $\square \notin S$ und $C \in S$ ein minimales Gegenbeispiel für I_S, so gibt es eine $\mathcal{K}$-Inferenz mit Hauptprämisse C und Konklusion D mit $C \succ_c D$ und $I_S \not\models D$.

Beachte

Wir verlangen nur, dass $\mathcal{K}$ in S Gegenbeispiele verkleinert, wenn S saturiert ist.

Da $\succ_c$ Noethersch ist, sieht man leicht, dass ein S kein Gegenbeispiel enthalten kann, wenn zu jedem Gegenbeispiel $C \in S$ ein kleineres Gegenbeispiel $D \in S$ existiert.

Das Hauptresultat für Grundklauseln

Sei S eine Menge von Grundklauseln,
Φ ein beliebiger Modellfunktor.

Satz 4.12.

Hat $\mathcal{K}$ die Verkleinerungseigenschaft für Gegenbeispiele und ist S $\mathcal{K}$-saturiert bis auf Redundanz, so gilt:

S ist H-erfüllbar gdw $\Box \notin S$.

Beachte

Sei $\mathcal{K}$ monoton und korrekt.

a) Ist π eine $\mathcal{K}$-Inferenz zu S mit Konklusion D, so ist π in $S \cup \{D\}$ redundant.

b) Ist $C \in S$ redundant, so bleibt C redundant, wenn man
- redundante Klauseln D aus S entfernt oder
- Klauseln D (mit $S \models D$) in S einfügt.

Also folgt aus Satz 4.12:

Es reicht, S so weit zu saturieren, dass für alle $\mathcal{K}$-Inferenzen π zu S mit nicht-redundanten Prämissen con(π) schon in S liegt oder aber redundant bezüglich S ist. Dann gilt: S ist H-erfüllbar gdw $\Box \notin S$.

Beweis zu Satz 4.12

Beweis

Ist $\Box \in S$, so ist S unerfüllbar.

Sei $\Box \notin S$ und $T = S - R(S)$.

Für jedes H-Modell I gilt $I \models S \;\mathrm{gdw}\; I \models T$.

Wir zeigen $I_T \models T$, dann gilt $I_T \models S$ und S ist H-erfüllbar.

Annahme $I_T \not\models T$:

Es gibt ein minimales $C \in T$ mit $I_T \not\models C$.

T ist nach Lemma 4.14 saturiert bis auf Redundanz und $\mathcal{K}$ hat die Verkleinerungseigenschaft für Gegenbeispiele, also gibt es eine $\mathcal{K}$-Inferenz π zu T mit

$$\pi = \frac{C_1 \ldots C_n \quad C}{D} \quad , C \succ_c D, I_T \not\models D \qquad (*)$$

Nach Lemma 4.14 ist π redundant, wegen $T \cap R(T) = \emptyset$ gilt also $T_C \models D$.

Nach Wahl von C gilt $I_T \models T_C$.

Aus $I_T \models T_C$ und $T_C \models D$ folgt $I_T \models D$. $\lightning$ zu (*)

Ableitungen mit Redundanz

Definition 4.24.

$S \overset{0}{\vdash} S'$ gdw S' entsteht aus S durch

a) Hinzunahme von Grundklauseln C mit $S \models C$ oder

b) Löschen von Grundklauseln C, die in S redundant sind.

$(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist eine **Ableitung** (mit Redundanz), falls $S_i \overset{0}{\vdash} S_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.

Setze

$$S^\infty = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \qquad S_\infty = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \geq i} S_j$$

Es ist S_∞ die Menge der **persistenten** Klauseln.

Lemma 4.15

Sei $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Ableitung. Dann gilt

a) $R(S_i) \subseteq R(S^\infty) = R(S_\infty)$.

b) S_∞ ist erfüllbar gdw S_0 ist erfüllbar.

Also

Redundanz und (Un-)Erfüllbarkeit bleiben während der ganzen Ableitung erhalten und übertragen sich auch auf das Grenzsystem S_∞.

Fairness (1)

Voraussetzung ab jetzt

$\mathcal{K}$ ist monoton und korrekt: Für jede $\mathcal{K}$-Inferenz $\dfrac{C_1 \ldots C_n \quad C}{D}$

gilt $C \succ_c D$ und $\{C_1, \ldots, C_n, C\} \models D$.

Definition 4.25.

Eine Ableitung $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist $\mathcal{K}$-**fair**, falls jede $\mathcal{K}$-Inferenz mit nicht-redundanten Prämissen in S_∞ redundant in S^∞ ist, d. h., falls $\mathcal{K}(S_\infty - R(S_\infty)) \subseteq \mathcal{K}_R(S^\infty)$ gilt.

Lemma 4.16

Eine Ableitung $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist $\mathcal{K}$-fair, falls die Konklusion jeder nicht-redundanten $\mathcal{K}$-Inferenz mit nicht-redundanten Prämissen in S_∞ in S^∞ liegt oder in S^∞ redundant ist, d. h., falls

con$(\mathcal{K}(S_\infty - R(S_\infty)) - \mathcal{K}_R(S_\infty - R(S_\infty))) \subseteq S^\infty \cup R(S^\infty)$

Also

$\mathcal{K}$-Fairness kann erreicht werden, indem man garantiert, dass alle (nicht-redundanten) $\mathcal{K}$-Inferenzen π mit Prämissen aus S_∞ gezogen werden, also con$(\pi) \in S^\infty \cup R(S^\infty)$ gilt.

Fairness (2)

Sei $\mathcal{K}$ korrekt und monoton.

Lemma 4.17

Sei $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine $\mathcal{K}$-faire Ableitung. Dann ist das Grenzsystem S_∞ $\mathcal{K}$-saturiert bis auf Redundanz.

Satz 4.13.

$\mathcal{K}$ habe die Verkleinerungseigenschaft für Gegenbeispiele und $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sei eine $\mathcal{K}$-faire Ableitung.
Dann gilt: S_0 ist unerfüllbar $\mathrm{gdw}\ \Box \in S_\infty$.

Satz 4.14.

Hat $\mathcal{K}$ die Verkleinerungseigenschaft für Gegenbeispiele, so ist $\mathcal{K}$ vollständig.

Beweis:

Sei $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine faire Ableitung mit $S_0 = S$. Ist S unerfüllbar, so gilt $\Box \in S_\infty$, also auch $\Box \in S_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $S \overset{*}{\underset{\mathcal{K}}{\vdash}} \Box$.

Bemerkung zum Entwickeln von Inferenzsystemen (1)

Vorgehen

1. Man entwickelt häufig zunächst ein Inferenzsystem $\mathcal{GK}$, das auf Grundklauseln arbeitet und alle benötigten Eigenschaften hat: Korrektheit, Monotonie, Verkleinerung von Gegenbeispielen (bezüglich geeignetem Modellfunktor Φ).
   Dann gilt: Ist S' $\mathcal{GK}$-saturiert bis auf Redundanz so gilt
   $$S' \text{ ist H-erfüllbar } \mathrm{gdw}\ \Box \notin S'.$$
2. Man erweitert dann $\mathcal{GK}$ zu einem Inferenzsystem $\mathcal{K}$ auf Klauseln, so dass gilt
   - $\mathcal{K}$ und $\mathcal{GK}$ stimmen auf Grundklauseln überein.
   - Jede nicht-redundante $\mathcal{GK}$-Inferenz ist liftbar zu einer $\mathcal{K}$-Inferenz.

   Dann gilt: Ist S $\mathcal{K}$-saturiert bis auf Redundanz, so gilt
   $$S \text{ ist H-erfüllbar } \mathrm{gdw}\ \Box \notin S.$$
3. Man definiert die Fairness so, dass für jede faire $\mathcal{K}$-Ableitung $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gilt
   $$S_0 \text{ ist H-unerfüllbar } \mathrm{gdw}\ \Box \in S_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}.$$

Hier

Wir bezeichnen auch $\mathcal{GK}$ mit $\mathcal{K}$, fassen also $\mathcal{GK}$ als Restriktion von $\mathcal{K}$ auf Grundklauseln auf.