Geordnete Grund-Resolution (1)

Beachte

Der Resolutionsschritt „$A \vee C$ und $\neg A \vee D$ liefert $C \vee D$“ ist in $\mathcal{R}$ für jedes A anwendbar.

Dies führt zu einem sehr großem Suchraum bei der Suche nach einer Herleitung von $\Box \in S$.

Der Beweis zu Satz 4.2 liefert ein Mittel zur Suchraumeinschränkung.

Definition 4.6.

Sei $\succ$ totale Noethersche Partialordnung auf GAtom und $\succ_c$ wie oben.

Der Kalkül **geordnete Resolution** $\mathcal{R}_\succ$ zu $\succ$ besteht aus den Inferenzregeln

$$\frac{A \vee C \quad \neg A \vee D}{C \vee D} \quad \text{falls } A \text{ strikt maximal in } A \vee C \text{ und } \neg A \text{ maximal in } \neg A \vee D \text{ ist}$$

$$\frac{A \vee A \vee C}{A \vee C} \quad \text{falls } A \text{ maximal in } A \vee A \vee C \text{ ist}$$

Geordnete Grund-Resolution (2)

Beachte

$\mathcal{R}_\succ$ beschränkt

a) Resolutionsschritte auf Atome, die maximal in beiden Prämissen sind und
b) Faktorisierungsschritte auf positive Literale A, so dass A maximal in der Prämisse ist.

Satz 4.3.

Satz 4.2 gilt auch für $\mathcal{R}_\succ$ statt $\mathcal{R}$.

Beweis: Übung. Der Beweis ist fast wörtlich übertragbar.

Bemerkung

Diese Suchraumbeschränkung gilt nicht nur für Grundklauseln. Sie ist auch auf die Resolution für beliebige Klauselmengen übertragbar. Siehe später.

Saturierung mit $\mathcal{R}_\succ$ für Grundklauseln

Definition 4.7.

Eine $\mathcal{R}_\succ$-Ableitung $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ heißt **fair**, falls $S^* = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$ abgeschlossen unter $\mathcal{R}_\succ$ ist.

Beachte

a) Fairness heißt, dass jede mögliche Resolutions- bzw. Faktorisierungsinferenz auch einmal gezogen werden muss.

b) Fairness ist leicht zu realisieren.

Lemma 4.6

a) Sei S_0 eine Menge von Grundklauseln und $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine faire $\mathcal{R}_\succ$-Ableitung mit $S_0 = S$. Ist S_0 H-unerfüllbar, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\Box \in S_n$.

b) $\mathcal{R}_\succ$ ist vollständig.

Beweis:

a) Ist S_0 H-unerfüllbar, so gilt dies auch für $S^* = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$. Dann ist S^* abgeschlossen unter $\mathcal{R}_\succ$. Es gilt $\Box \in S^*$ nach Satz 4.3, also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\Box \in S_n$.

b) Für jedes H-unerfüllbare S gilt $S \overset{*}{\underset{\mathcal{R}_\succ}{\vdash}} \Box$ nach a).

Hauptergebnis für Grundklauseln

Satz 4.4.

Der Resolutionskalkül $\mathcal{R}_\succ$ ist korrekt und vollständig für Grundklauseln: Ist S eine Menge von Grundklauseln, so gilt $S \overset{*}{\underset{\mathcal{R}_\succ}{\vdash}} \Box \;\mathrm{gdw}\; S$ ist H-unerfüllbar.

Beweis:

Dies folgt aus Lemma 4.3 und Lemma 4.6.

Zusatz

Der obige Satz gilt erst recht für $\mathcal{R}$ statt $\mathcal{R}_\succ$, da jede $\mathcal{R}_\succ$-Inferenz auch eine $\mathcal{R}$-Inferenz ist.

Das Lifting-Lemma

Ziel

$\mathcal{R}_\succ$ ist korrekt und vollständig für beliebige Klauselmengen S.

Ansatz

Wir führen die Ideen wieder erst für $\mathcal{R}$ ein und übertragen sie dann auf $\mathcal{R}_\succ$.

S ist H-unerfüllbar gdw gnd(S) ist H-unerfüllbar.

Zeige: $\mathcal{R}_\succ$ führt auf S die Inferenzschritte der Resolution auf gnd(S) parametrisiert durch: Die Variablen sind zu Grundtermen instanziierbare Parameter.

Lemma 4.7 (Lifting-Lemma)

Seien C_1' und C_2' Grundinstanzen von C_1 bzw. C_2 und sei C' eine Resolvente von C_1', C_2'. Dann gibt es eine Resolvente C von C_1, C_2, so dass C' eine Grundinstanz von C ist.

Beweis: Seien o.B.d.A. C_1, C_2 variablendisjunkt. Es gilt

$C_1 \equiv A \vee D_1 \qquad C_2 \equiv \neg B \vee D_2$

$C_1' \equiv \tau(A) \vee \tau(D_1) \quad C_2' \equiv \neg\tau(B) \vee \tau(D_2)$

$C' \equiv \tau(D_1) \vee \tau(D_2) \quad \tau(A) \equiv \tau(B)$

Also existiert $\sigma =$ mgu(A, B) und τ' mit $\tau = \tau' \circ \sigma$ auf Var(C_i).

Dann ist $C \equiv \sigma(D_1) \vee \sigma(D_2)$ ist Resolvente zu C_1, C_2.

Es ist $C' \equiv \tau'(C)$ eine Instanz von C.

Der Resolutionskalkül für beliebige Klauseln (1)

Sei

gnd$(S) = \{\sigma(C) \mid C \in S, \sigma(C)$ Grundklausel$\}$.

Also S ist H-erfüllbar gdw gnd(S) ist H-erfüllbar.

Beachte

Lemma 4.7 „liftet“ Resolutionsschritte. Ein analoges Lemma gilt für Faktorisierungsschritte.

Lemma 4.8

Sei $C_1', \ldots, C_n'$ eine $\mathcal{R}$-Herleitung aus gnd(S).

Dann gibt es eine $\mathcal{R}$-Herleitung $C_1, \ldots, C_n$ aus S und Grundsubstitutionen τ_i, so dass $C_i' \equiv \tau_i(C)$ für $i = 1, \ldots, n$.

Beweis:

Induktion nach n mit dem Lifting-Lemma.

Der Resolutionskalkül für beliebige Klauseln (2)

Satz 4.5.

Der Resolutionskalkül $\mathcal{R}$ ist korrekt und vollständig für beliebige Klauselmengen S: Es gilt $S \overset{*}{\underset{\mathcal{R}}{\vdash}} \Box \text{ gdw } S$ ist H-unerfüllbar.

Beweis:

Zur Korrektheit: Dies folgt aus Lemma 4.2.

Zur Vollständigkeit: Sei S unerfüllbar.

Es gibt nach Satz 4.4 eine $\mathcal{R}$-Herleitung $C'_1, \ldots, C'_n \equiv \Box$ aus gnd(S).

Nach dem letzten Lemma gibt es also eine $\mathcal{R}$-Herleitung $C_1, \ldots, C_n$ aus S mit $\Box \equiv \tau_n(C_n)$, also $C_n \equiv \Box$.

Also gilt $S \overset{*}{\underset{\mathcal{R}}{\vdash}} \Box$.

Geordnete Resolution auf beliebigen Klauseln (1)

Ziel

Angabe von $\mathcal{R}_\succ$ auf Klauseln, so dass $\mathcal{R}_\succ$ korrekt und vollständig ist.

Definition 4.8.

Eine Noethersche Partialordnung $\succ$ auf den Atomen heißt **zulässig**, falls gilt: (1) $\succ$ ist total auf den Grundatomen und (2) aus $A \succ B$ folgt $\sigma(A) \succ \sigma(B)$ für jede Grundsubstitution σ.

Beachte

Sei $F_P = F \cup P$ die Menge der Funktions- und Prädikatssymbole. Dann ist Term(F_P, V) definiert. Sei $\succ$ eine LPO oder KBO mit totaler Präzedenz auf F_P. Dann ist $\succ$ eine zulässige Partialordnung auf den Atomen.

Beachte

Eine zulässige Ordnung $\succ$ ist i. Allg. nicht total auf den Klauseln.
Mit $\succ$ soll die Resolutionsinferenz aus $\mathcal{R}$ so eingeschränkt werden, dass jede $\mathcal{R}_\succ$-Grundinferenz „$\sigma(A) \vee \sigma(C)$ und $\sigma(\neg B) \vee \sigma(D)$ liefert $\sigma(C \vee D)$“ noch „liftbar“ ist. Eine analoge Forderung gilt für die Faktorisierungsinferenz. Wir zeigen, dass dann $\mathcal{R}_\succ$ noch vollständig ist.

Geordnete Resolution auf beliebigen Klauseln (2)

Bezeichnung

Sei $\succ$ eine zulässige Partialordnung auf den Atomen. Dann sind die Ordnungen $\succ_l$ auf den Literalen und $\succ_c$ auf den Klauseln analog zu früher definiert:

$$l \succ_l l' \text{ gdw } \mathsf{comp}(l) \succ\!\!\succ \mathsf{comp}(l')$$
$$C \succ_c C' \text{ gdw } \mathsf{comp}(C) \succ\!\!\succ \mathsf{comp}(C')$$

Das Literal l heißt (**strikt**) **maximal** in $C \vee l$, falls $l' \not\succ_l l$ (bzw. $l' \succeq_l l$) für alle l' aus C gilt.

Definition 4.9.

Sei $\succ$ zulässig. Der Kalkül $\mathcal{R}_\succ$ auf den Klauseln ist gegeben durch

$$\frac{A \vee C \quad \neg B \vee D}{\sigma(C \vee D)} \quad \begin{array}{l} \text{falls } \sigma = \mathsf{mgu}(A, B), \\ \sigma(A) \text{ ist strikt maximal in } \sigma(A \vee C), \\ \sigma(\neg B) \text{ ist maximal in } \sigma(\neg B \vee D). \end{array}$$

$$\frac{A \vee B \vee C}{\sigma(B \vee C)} \quad \begin{array}{l} \text{falls } \sigma = \mathsf{mgu}(A, B), \\ \sigma(A) \text{ ist maximal in } \sigma(A \vee B \vee C) \end{array}$$

Beachte

Auf den Grundklauseln sind die $\mathcal{R}_\succ$-Inferenzen genauso wie die $\mathcal{R}_\succ$-Inferenzen von früher definiert.

Ist eine Grundinstanz $\tau(A)$ (strikt) maximal in $\tau(A \vee C)$, so ist A (strikt) maximal in $A \vee C$.

Eine Klausel C kann mehrere strikt maximale Literale besitzen.

Geordnete Resolution auf beliebigen Klauseln (3)

Frage

Ist jede $\mathcal{R}_\succ$-Inferenz auf Grundklauseln liftbar?

Definition 4.10.

Sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül auf Klauseln. Sei C_i eine Klausel und $C'_i \equiv \sigma_i(C_i)$ eine Grundinstanz von C_i für $1 \leq i \leq n$.

Sei $\dfrac{C'_1 \ldots C'_n}{D'}$ eine $\mathcal{K}$-Grundinferenz. Sie heißt **liftbar**, falls es eine $\mathcal{K}$-Inferenz $\dfrac{C_1 \ldots C_n}{D}$ gibt, so dass D' eine Instanz von D ist.

Lemma 4.9 (Lifting-Lemma)

Jede $\mathcal{R}_\succ$-Grundinferenz ist liftbar.

Beweis: Übung.

Folgerung

Sei $C'_1, \ldots, C'_n$ eine $\mathcal{R}_\succ$-Herleitung von C'_n aus $\mathsf{gnd}(S)$. Dann gibt es eine $\mathcal{R}_\succ$-Herleitung $C_1, \ldots, C_n$ von C_n aus S und Grundsubstitutionen τ_i, so dass $C'_i \equiv \tau_i(C_i)$ für $i = 1, \ldots, n$.

Hauptergebnis für $\mathcal{R}_\succ$ auf Klauseln

Satz 4.6.

$\mathcal{R}_\succ$ ist korrekt und vollständig: Für jede Klauselmenge S gilt
$S \underset{\mathcal{R}_\succ}{\vdash} \Box \, \mathrm{gdw} \; S$ ist H-unerfüllbar.

Beweis:

a) (Korrektheit) Sei $S \underset{\mathcal{R}_\succ}{\vdash} \Box$.
Dann ist S H-unerfüllbar nach Lemma 4.3.

b) (Vollständigkeit) Sei S H-unerfüllbar.
Dann ist auch gnd(S) unerfüllbar. Es gibt nach Satz 4.4 eine $\mathcal{R}_\succ$-Herleitung $C_1', \ldots, C_n' \equiv \Box$ von $\Box$ aus gnd(S).
Also gibt es eine $\mathcal{R}_\succ$-Herleitung $C_1, \ldots, C_n$ von C_n aus S und ein τ_n mit $\tau_n(C_n) \equiv C_n' \equiv \Box$.
Also ist $C_n \equiv \Box$ und es gilt $S \underset{\mathcal{R}_\succ}{\vdash} \Box$.

Paramodulation für PL1=

Sei der Einfachheit halber

$P = \{=\}$.

$S =$ Menge von Klauseln über sig $= (F, P, \tau)$.

$C \vee s \doteq t$ steht für $C \vee s = t$ oder $C \vee t = s$.

Definition 4.11.

Der Paramodulationskalkül $\mathcal{P}$ besteht aus 3 Inferenzregeln:

Paramodulation

$$\frac{C \vee s \doteq t \qquad D[u]_\pi}{\sigma(C \vee D[t]_\pi)} \qquad \text{falls } \sigma = \text{mgu}(s, u)$$

Faktorisierung

$$\frac{C \vee s \doteq t \vee u = v}{\sigma(C \vee s = t)} \qquad \text{falls } \sigma = \text{mgu}\{(s, u), (t, v)\}$$

Resolution mit dem Reflexivitätsaxiom (Ref. Resolution)

$$\frac{C \vee \neg s = t}{\sigma(C)} \qquad \text{falls } \sigma = \text{mgu}(s, t)$$