Weitere Beispiele

1. Beispiel

S bestehe aus den Klauseln (1) bis (4). Dies erzeugt (5) bis (7).

(1) $p \vee q$
(2) $p \vee \neg q$
(3) $\neg p \vee r$
(4) $\neg p \vee \neg r$

(5) p
(6) $\neg p$
(7) $\square$

Also ist S H-unerfüllbar.

2. Beispiel

S bestehe aus

(1) $p \vee p$ (2) $\neg p \vee \neg p$

Abschluss unter der Resolutionsregel liefert nur

(3) $p \vee \neg p$

Mit der Faktorisierungsregel ergibt sich aus (1) und (2)

(4) p (5) $\neg p$ (6) $\square$

Also: Die Faktorisierungsregel wird benötigt für den Nachweis von $S \overset{*}{\underset{\mathcal{R}}{\vdash}} \square$.

Zur Vollständigkeit von $\mathcal{R}$ für Grundklauseln

Bezeichnung

S heißt **abgeschlossen unter** $\mathcal{R}$, falls für jede Inferenzregel gilt: Sind die Prämissen in S, so ist auch die Konklusion in S.

Beweistechnik zum Vollständigkeitsbeweis

Wir zeigen bei Eingabe S:

a) Jede „faire“ $\mathcal{R}$-Ableitung liefert ein Grenzsystem S^*, das unter $\mathcal{R}$ abgeschlossen ist.
b) Es gilt $\square \in S^* \text{ gdw } S^*$ ist H-unerfüllbar.
c) Ist S unerfüllbar, so gilt $\square \in S^*$, also $S \overset{*}{\underset{\mathcal{R}}{\vdash}} \square$.

Also

Ist S unerfüllbar, so zeigt jede „faire“ $\mathcal{R}$-Ableitung, dass $S \overset{*}{\underset{\mathcal{R}}{\vdash}} \square$ gilt.

Konstruktion eines Modells: Die Idee

Sei

S eine Menge von Grundklauseln über sig $= (F, P, \alpha)$.

GAtom die Menge der Grundatome A über sig.

C eine Klausel, also eine Multimenge von Literalen.

$I \subseteq$ GAtom ein H-Modell.

Dann: $I \models C \;\; \mathrm{gdw}$ Es gibt A mit $A \in C \cap I$ oder $\neg A \in C, A \notin I$

$I \models S \; \mathrm{gdw} \; I \models C$ für alle $C \in S$.

Idee: Wir zeigen:

Sei S abgeschlossen unter $\mathcal{R}$ und $\square \notin S$. Dann ist S H-erfüllbar.

Beweis-Idee

Sei $\succ$ totale Noethersche Ordnung auf GAtom.

Definiere Noethersche Ordnung $\succ_c$ auf Klauseln.

Definiere durch Induktion nach $\succ_c$ ein Modell $I \subseteq$ GAtom, so dass $I \models C$ für alle $C \in S$. Dann ist I ein Modell für S.

Eine Ordnung auf Literalen und Klauseln

Sei $\succ$ totale Noethersche Ordnung auf GAtom.

Wir definieren zunächst die Komplexitäten comp(l) und comp(C) für Literale l und Klauseln C.

Definition 4.4.

Sei comp$(A) = \{A\}$ und comp$(\neg A) = \{A, A\}$.
Dann ist comp(C) die Multimenge der comp(l) mit l in C.
Setze

$$l_1 \succ_l l_2 \;\; \mathrm{gdw} \;\; \mathrm{comp}(l_1) \succ\!\!\succ \mathrm{comp}(l_2)$$
$$C_1 \succ_c C_2 \;\; \mathrm{gdw} \;\; \mathrm{comp}(C_1) \succ\!\!\succ_l \mathrm{comp}(C_2)$$

Beispiel

Sei $C_1 = \{A_1, A_2, A_2, A_3, A_3\}$, $C_2 = \{A_1, \neg A_2, A_3, A_3\}$.

Es ist comp$(C_2) = \{\{A_1\}, \{A_2, A_2\}, \{A_3\}, \{A_3\}\}$ und comp$(C_1) = \{\{A_1\}, \{A_2\}, \{A_2\}, \{A_3\}, \{A_3\}\}$, also $C_2 \succ_c C_1$.

Allgemein gilt: Aus $C_1 \subseteq C_2$ folgt $C_2 \succeq_c C_1$.

Eine Ordnung auf Literalen und Klauseln (Forts.)

Beachte

a) $\succ_l$ und $\succ_c$ sind Noethersche Ordnungen auf den Grundliteralen bzw. den Grundklauseln.

b) Es gilt stets $\neg A \succ_l A$. Aus $A \succ B$ folgt $A \succ_l \neg B \succ_l B$.

c) Gilt $A \succeq_l l$ für alle $l \in C \vee D$, so gilt $\neg A \vee D \succ_c A \vee C$.

Bezeichnung

Sei $C \equiv l \vee C'$. Es heißt l (**strikt**) **maximal** in C, falls $l \succeq_l l'$ (bzw. $l \succ l'$) für alle $l' \in C'$ gilt.

Beachte

Da die Ordnung $\succ$ total ist, existiert ein maximales Literal l in C. Tritt l nur einmal in C auf, so ist l strikt maximal in C.

Kandidatenmodelle

Ansatz Verkleinerung von Gegenbeispielen

Wir ordnen jeder Klauselmenge S ein H-Modell I_S zu mit:

Gilt nicht $I_S \models S$ (also gibt es ein **Gegenbeispiel** $C \in S$ mit $I_S \not\models C$), so kann man aus S durch einen $\mathcal{R}$-Schritt ein Gegenbeispiel D erzeugen mit $C \succ_c D$.

Dazu: Wir definieren durch Induktion nach $\succ_c$ zu jeder Klausel C eine Menge ε_C von Atomen und die H-Interpretation $I_C = \bigcup_{C \succ_c D} \varepsilon_D$.

Definition 4.5.

Sei C eine Klausel und $I_C = \bigcup_{C \succ_c D} \varepsilon_D$ schon gegeben. Gilt

(1) $C \in S$,

(2) $C \equiv A \vee C'$ und A ist strikt maximal in C und

(3) $I_C \not\models C$,

so ist $\varepsilon_C = \{A\}$, sonst ist $\varepsilon_C = \emptyset$.

Wir sagen, C **produziert** A und C ist **produktiv**, falls $\varepsilon_C = \{A\}$.

Das **Kandidatenmodell** $I_S = I_S^{\succ}$ ist $I_S = \bigcup_{C \in S} \varepsilon_C$.

I_C ist die partielle Interpretation unterhalb C.

Sei $I^C = I_C \cup \varepsilon_C$.

Beispiele

Beispiel 1

Sei $A \succ B$ und $S = \{C_1, \ldots, C_4\}$. Es ergibt sich

$C \equiv C_i$	I_C	ε_C	Bemerkung
$B \vee \neg B$	$\varnothing$	$\varnothing$	Tautologie
$A \vee B$	$\varnothing$	$\{A\}$	A ist maximal
$\neg A \vee \neg B$	$\{A\}$	$\varnothing$	bereits erfüllt
$A \vee \neg A$	$\{A\}$	$\varnothing$	Tautologie

S ist abgeschlossen unter $\mathcal{R}$, es gilt $I_S = \{A\}$ und $I_S \models S$.

Beispiel 2

Sei $B_1 \succ A_1 \succ B_0 \succ A_0$ und $S = \{C_1, \ldots, C_5\}$.

$C \equiv C_i$	I_C	ε_C	Bemerkung
$A_0 \vee B_0$	$\varnothing$	$\{B_0\}$	B_0 ist maximal
$B_0 \vee A_1$	$\{B_0\}$	$\varnothing$	bereits erfüllt
$\neg B_0 \vee A_1$	$\{B_0\}$	$\{A_1\}$	A_1 ist maximal
$\neg B_0 \vee \neg A_1$	$\{B_0, A_1\}$	$\varnothing$	nicht erfüllt
$\neg B_0 \vee \neg B_1$	$\{B_0, A_1\}$	$\varnothing$	bereits erfüllt

S ist nicht abgeschlossen unter $\mathcal{R}$. Es ist $I_S = \{A_1, B_0\}$ und es gilt nicht $I_S \models S$. Aus S ist z. B. erst die Klausel $\neg B_0$ und dann A_0 und A_1 erzeugbar. Für $I = \{A_0, A_1\}$ gilt $I \models S$.

Eigenschaften der Modellkonstruktion (1)

Beachte

Sei $C \succ_c D$ und l das maximale Literal in C. Dann gilt $l \succeq_l l'$ für alle $l' \in D$. Ist l strikt maximal in C und $l \in D$, so ist l auch strikt maximal in D. Weiter gilt $I_D \subseteq I^D \subseteq I_C \subseteq I_S$.

Lemma 4.4

a) Gilt $D' \succ_c D \succeq_c C$ und $I_D \models C$, so gilt auch $I_{D'} \models C$ und $I_S \models C$.

b) Gilt $D \succ_c C$ und $I_S \models C$, so gilt $I_D \models C$.

Beweis:

a) Es gibt ein A mit (1) $A \in C$ und $A \in I_D$ oder (2) $\neg A \in C$ und $A \notin I_D$.
zu (1) Aus $A \in I_D$ folgt $A \in I_{D'} \subseteq I_S$, also $I_{D'} \models C$ und $I_S \models C$.
zu (2) Wir zeigen $A \notin I_S$. Dann gilt $A \notin I_{D'}$ und $I_{D'} \models C$ und $I_S \models C$.
Annahme: $A \in I_S$. Dann wird A von einem $C_0 \equiv A \vee C'$ produziert.
Gilt $C_0 \succeq_c C$, so gilt $A \succeq_l l$ für alle $l \in C$, also $A \succeq_l \neg A$. $\lightning$
Gilt $C \succ_c C_0$, so gilt $D \succeq C \succ C_0$, also $A \in I_D$. $\lightning$

Beweis (Forts.)

b) Gilt $I_C \models C$, so gilt $I_D \models C$ nach a). Sei also $I_C \not\models C$.
Es gibt ein A mit (1) $A \in C$ und $A \in I_S$ oder (2) $\neg A \in C$ und $A \notin I_S$.
Zu (1): Wegen $A \in I_S$ wird A von einem $D_0 \equiv A \vee D'$ produziert. Ist $C \succeq_c D_0$, so gilt $A \in I_D$ wegen $D \succ_c D_0$.
Ist $D_0 \succ_c C$, so ist A strikt maximal in C nach Beachte. Wegen $I_C \not\models C$ produziert C A. Dann gilt $A \in I_{D_0}$ und somit $I_{D_0} \models D_0$. Also kann D_0 nicht produktiv sein. $\lightning$
Zu (2): Aus $A \notin I_S$ folgt $A \notin I_D$, also gilt $I_D \models C$.

Eigenschaften der Modellkonstruktion (2)

Lemma 4.5 Sei $C \in S$.

a) Ist $C \equiv A \vee C'$ und A strikt maximal in C, so gilt $I_S \models C$.
b) Ist $I_S \not\models C$ und l maximal in C, so gilt (1) $l \equiv \neg A$ oder (2) $l \equiv A$ und $C \equiv A \vee A \vee C'$.

Beweis:

a) Produziert C A, so gilt $A \in I^C \subseteq I_S$, also $I_S \models C$. Sonst gilt $I_C \models C$, also auch $I_S \models C$ nach Lemma 4.4 a).
b) Ist l negativ, also $l \equiv \neg A$, so ist nichts zu zeigen. Sei $l \equiv A$. Dann ist A nicht strikt maximal in C nach a). Also gilt $C \equiv A \vee A \vee C'$.

Eigenschaften der Modellkonstruktion (3)

Satz 4.1. ($\mathcal{R}$ verkleinert Gegenbeispiele)

Sei $C \not\equiv \Box$, $C \in S$ und $I_S \not\models C$. Dann gibt es eine $\mathcal{R}$-Inferenz mit C als Hypothese und Konklusion D, so dass $I_S \not\models D$ und $C \succ_c D$ gilt.

Beweis:

Nach Lemma 4.5, Teil b) hat C die Form $C \equiv \neg A \vee C'$ oder $C \equiv A \vee A \vee C'$, wobei $\neg A$ bzw. A maximal in C ist.

a) Ist $C \equiv A \vee A \vee C'$, so liefert eine Faktorisierungsinferenz $D \equiv A \vee C'$. Es gilt $C \succ_c D$ wegen $C \supset D$ und $I_S \not\models D$ wegen $I_S \not\models C$.

b) Sei $C \equiv \neg A \vee C'$. Wegen $I_S \not\models C$ gilt $A \in I_S$, also wird A von einem $C_0 \equiv A \vee C_0'$ aus S produziert. Eine Resolutionsinferenz mit Hypothesen C_0 und C liefert $D \equiv C_0' \vee C'$. Da C_0 A produziert, gilt $\neg A \succ_l A \succ_l l$ für alle $l \in C_0'$. Dies zeigt $C \equiv \neg A \vee C' \succ_c C_0' \vee C' \equiv D$. Da C_0 A produziert, gilt $I_{C_0} \not\models C_0$, also auch $I_{C_0} \not\models C_0'$. Lemma 4.4 b) liefert jetzt $I_S \not\models C_0'$. Wegen $I_S \not\models C$ gilt auch $I_S \not\models C'$. Dies zeigt $I_S \not\models D \equiv C_0' \vee C'$.

Ergebnis für $\mathcal{R}$ und Grundklauseln

Sei S eine Menge von Grundklauseln.

Satz 4.2.

Sei S abgeschlossen unter $\mathcal{R}$ und $\Box \notin S$. Dann ist S H-erfüllbar.

Beweis:

Gilt $I_S \not\models S$, so gibt es ein minimales Gegenbeispiel $C \in S$. Nach Satz 4.1 gibt es dann auch ein Gegenbeispiel D mit $C \succ_c D$ und $D \in S$, da S unter $\mathcal{R}$ abgeschlossen ist. Dies ist nicht möglich.