Einfache Inferenzregeln: Tautologien

Beachte Tautologische Klauseln sind gültig.

Regeln

a) Komplementäre Literale

$$\frac{\langle \Gamma, \lambda, \Delta, \lambda', \Pi; \omega\rangle}{} \quad \text{falls } \lambda' =_{\mathsf{lit}} \overline{\lambda}$$

b) Allgemeingültige Ungleichheit

$$\frac{\langle \Gamma, t_1 \neq t_2, \Delta; \omega\rangle}{} \quad \text{falls } t_1, t_2 \in \mathsf{Term}(C, V^C) \text{ nicht unifizierbar}$$

c) Allgemeingültige Ordnungsatome

$$\frac{\langle \Gamma, (\,) < (u_1, \ldots, u_k), \Delta; \omega\rangle}{} \quad \text{falls } k > 0$$

Beispiele

Gegeben sei das Ziel $\langle \Gamma; \omega\rangle$.
Γ ist gültig, falls Γ
(a) $t_1 = t_2$ und $t_2 \neq t_1$ oder
(b) $f(a, t_1) \neq f(b, t_2)$ mit $f, a, b \in C$, $a \not\equiv b$ und
$t_1, t_2 \in \mathsf{Term}(C, V^C)$ oder
(c) $(\,) < s(0)$

enthält. Dann erzeugt die Abarbeitung von $\langle \Gamma; \omega\rangle$ kein neues Ziel.

Einfache Inferenzregeln: Zerlegung von Atomen

Ziel

Zerlegen von A in $A_1, \ldots, A_k$, so dass A gilt gdw $A_1 \wedge \cdots \wedge A_k$ gilt.

Regeln

a) Zerlegung von Gleichheitsatomen

$$\frac{\langle \Gamma, t_1 = t_2, \Delta; \omega\rangle}{\langle u_1 = v_1, \Gamma, t_1 = t_2, \Delta; \omega\rangle \cdots \langle u_k = v_k, \Gamma, t_1 = t_2, \Delta; \omega\rangle}$$

falls $t_1 \equiv f(u_1, \ldots, u_k), t_2 \equiv f(v_1, \ldots, v_k)$

b) Zerlegung von def-Atomen: Sei $t \equiv f(t_1, \ldots, t_k)$

$$\frac{\langle \Gamma, \mathrm{def}(t), \Delta; \omega\rangle}{\langle \mathrm{def}(t_1), \Gamma, \mathrm{def}(t), \Delta; \omega\rangle \cdots \langle \mathrm{def}(t_k), \Gamma, \mathrm{def}(t), \Delta; \omega\rangle}$$

falls $f \in C \cup V^C$

c) Zerlegung von $<$-Atomen: Sei $\lambda \equiv t < f_1(\cdots f_k(t)), k > 0$

$$\frac{\langle \Gamma, t < f_1(\cdots f_k(t) \cdots), \Delta; \omega\rangle}{\langle \mathrm{def}(t), \Gamma, \lambda, \Delta; \omega\rangle} \quad \text{falls alle } f_i \in C$$

Beispiel: Zerlegen von def-Atomen

Sei $s, \mathsf{cons} \in C$ und $t \in F$ und $x, y, z, l \in V^C$

a) Betrachte $t \equiv s^i(x)$
$\langle \mathrm{def}(x); \omega\rangle$ liefert kein neues Teilziel, ist also gültig.
$\langle \mathrm{def}(s(x)); \omega\rangle$ liefert $\langle \mathrm{def}(x); \omega\rangle$ als Teilziel, ist also gültig.
Induktion nach i zeigt $\langle \mathrm{def}(s^i(x)); \omega\rangle$ ist gültig.

b) Betrachte $t \equiv \mathsf{cons}(x + y, \mathsf{cons}(z, l))$
$\langle \mathrm{def}(t); \omega\rangle$ liefert die beiden Teilziele
(1) $\langle \mathrm{def}(x + y), \mathrm{def}(t); \omega\rangle$
(2) $\langle \mathrm{def}(\mathsf{cons}(z, l)), \mathrm{def}(t); \omega\rangle$
Das Teilziel (1) muss mit dem Lemma „$\mathrm{def}(x + y)$ ist gültig“ gelöst werden.
Das Teilziel (2) liefert die Teilziele
(2.1) $\langle \mathrm{def}(z), \mathrm{def}(\mathsf{cons}(z, l)), \mathrm{def}(t); \omega\rangle$
(2.2) $\langle \mathrm{def}(l), \mathrm{def}(\mathsf{cons}(z, l)), \mathrm{def}(t); \omega\rangle$
Sie liefern keine neuen Teilziele, sind also gültig.

Beispiel: Zerlegen von $<$-Atomen

Sei $s \in C, t \in \mathsf{Term}(C, V^C)$

a) Betrachte $\lambda \equiv t < s^i(t), \quad i > 0$
$\langle t < s^i(t); \omega\rangle$ liefert das Teilziel $\langle \mathrm{def}(t), \lambda; \omega\rangle$
Also ist $\langle x < s^i(x); \omega\rangle$ gültig für alle $i > 0$.

b) Betrachte $\lambda \equiv \mathsf{cons}(x, l) < \mathsf{cons}(x, \mathsf{cons}(y, l))$
Offenbar gilt $\langle \Gamma; \omega\rangle$ für $\Gamma \equiv \{\lambda\}$.
Aber die angebene Inferenzregel ist zu schwach. Sie wird später verschärft.

Beachte

Ist $\langle t_1 < t_2; \omega\rangle$ als gültig nachweisbar, so ist auch $\langle \mathrm{def}(t_i); \omega\rangle$, $i = 1, 2$, gültig. Es gibt dann zu jeder Grundinstanz $(\sigma(t_1), \sigma(t_2))$ zwei Terme $t'_1, t'_2 \in \mathsf{Term}(C)$ mit $\sigma(t_i) =_E t'_i$ und $|t'_1| < |t'_2|$. Die intuitive Begründung für $|t'_1| < |t'_2|$ in der Inferenzregel „Zerlegen von $<$-Atomen“ ist, dass $f_i \in C$ für alle i gefordert wird. Daher folgt aus $t =_E t'$ auch $f_1(\ldots f_k(t) \ldots) =_E f_1(\ldots f_k(t') \ldots)$ und $|t'| < |f_1(\ldots f_k(t') \ldots)|$.

Einfache Inferenzregeln: Redundante Literale

Beachte

Ist λ unerfüllbar oder redundant in Γ, so gilt $\langle \Gamma; \omega \rangle$ gdw $\langle \Gamma, \lambda; \omega \rangle$.

Regeln

a) Redundante Literale

$$\frac{\langle \Gamma, \lambda, \Delta, \lambda', \Pi; \omega \rangle}{\langle \Gamma, \lambda, \Delta, \Pi; \omega \rangle} \quad \text{falls } \lambda =_{\text{lit}} \lambda'$$

b) Unerfüllbares Gleichheitsatom

$$\frac{\langle \Gamma, t_1 = t_2, \Delta; \omega \rangle}{\langle \Gamma, \Delta; \omega \rangle} \quad \begin{array}{l} \text{falls } t_1, t_2 \in \text{Term}(C, V^C) \text{ und} \\ t_1, t_2 \text{ nicht unifizierbar} \end{array}$$

c) Redundantes negiertes Gleichheitsatom

$$\frac{\langle \Gamma, t_1 \neq t_2, \Delta; \omega \rangle}{\langle \Gamma, \Delta; \omega \rangle} \quad \begin{array}{l} \text{falls } t_i \equiv f(u_1^i, \ldots, u_k^i), i = 1, 2 \\ u_j^1 \neq u_j^2 \in \Gamma \cup \Delta \text{ für alle } 1 \leq j \leq k \end{array}$$

d) Unerfüllbares Ordnungsliteral

$$\frac{\langle \Gamma, (u_1, \ldots, u_k) < (\,), \Delta; \omega \rangle}{\langle \Gamma, \Delta; \omega \rangle} \quad \text{falls } k > 0$$

Ausnutzen negativer Literale

Beachte

Eine Klausel $\Gamma = \neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A \vee B_1 \vee \cdots \vee B_m$ kann man auch schreiben als

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \cdots \vee B_m$$

Also: Ist $A_1 \equiv s = t$, so kann man in jedem B_i jedes s durch t ersetzen.

Regeln

a) Constant Rewriting

$$\frac{\langle \Gamma, \lambda[t_1]_p, \Delta; \omega \rangle}{\langle \Gamma, \lambda[t_2]_p, \Delta; \omega \rangle} \quad \text{falls } t_1 \neq t_2 \text{ in } \Gamma \cup \Delta$$

b) $\neq$-Unifikation

$$\frac{\langle \Gamma, t_1 \neq t_2, \Delta; \omega \rangle}{\langle \tau(\Gamma), \tau(\Delta); \tau(\omega) \rangle} \quad \begin{array}{l} \text{falls } \tau = \text{mgu}(t_1, t_2), \\ t_1, t_2 \in \text{Term}(C, V^C) \end{array}$$

Beispiele Sei $s(x) \in \text{Term}(C, V^C)$

a) $$\frac{\langle t \neq 0 \vee f(x, t) = f(x, 0); \omega \rangle}{\langle t \neq 0 \vee f(x, 0) = f(x, 0); \omega \rangle} \quad \text{mit Constant Rewriting}$$

b) $$\frac{\langle s(x) \neq s(y), x = y; \omega \rangle}{\langle x = x; \omega \rangle} \quad \text{mit } \neq\text{-Unifikation}$$

In beiden Fällen kann das neue Teilziel durch (wiederholte) Anwendung der Inferenzregel „Zerlegung von Gleichheitsatomen“ gezeigt werden.

Fallunterscheidung nach einer Klausel (1)

Beachte

Man kann eine Fallunterscheidung nach jeder allgemeingültigen Klausel machen.

Beispiel: $\Delta = \{\lambda, \overline{\lambda}\}$ ist stets allgemeingültig. Die Fallunterscheidung mit Δ angewandt auf Γ liefert
$\Gamma \cup \{\neg\lambda\}$ und $\Gamma \cup \{\lambda\}$ also $\lambda \Rightarrow \Gamma$ und $\neg\lambda \Rightarrow \Gamma$

Diese 2 Teilziele sind häufig einfacher zu beweisen.

Ansatz hier

Fallunterscheidung nach beliebigem Δ

Sei $\Delta = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$
$\Delta_i = \{\overline{\lambda_i}, \lambda_{i-1}, \ldots, \lambda_1\}$ für $i = 1, \ldots, n$

Dann ist $\Delta_0 \equiv \Delta \cup \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_n$ allgemeingültig.

Anwendung der Fallunterscheidung auf $\langle \Gamma; \omega \rangle$ mit Δ_0 liefert die Teilziele

$$\langle \Gamma \cup \Delta_1; \omega \rangle \langle \Gamma \cup \Delta_2; \omega \rangle \cdots \langle \Gamma \cup \Delta_n; \omega \rangle \langle \Gamma \cup \Delta; \omega \rangle$$

Bezeichnung

$\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Delta$ ist die Fallunterscheidung zu Δ.

Fallunterscheidung nach einer Klausel (2)

Sei $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$
$\Delta_i = (\overline{\lambda_i}, \lambda_{i-1}, \ldots, \lambda_1)$ für $i = 1, \ldots, n.$

Regel Fallunterscheidung nach Δ

$$\frac{\langle \Gamma; \omega \rangle}{\langle \Delta_1, \Gamma; \omega \rangle \cdots \langle \Delta_n, \Gamma; \omega \rangle \quad \langle \Delta, \Gamma; \omega \rangle}$$

Beispiel

$\Delta = \{\mathsf{less}(x, y) = \mathsf{true}, x = y, \mathsf{less}(y, x) = \mathsf{true}\}$ liefert

$$\frac{\langle \Gamma; \omega \rangle}{\begin{array}{c}\langle \mathsf{less}(x, y) \neq \mathsf{true}, \Gamma; \omega \rangle \\ \langle x \neq y, \mathsf{less}(x, y) = \mathsf{true}, \Gamma; \omega \rangle \\ \langle \mathsf{less}(y, x) \neq \mathsf{true}, x = y, \mathsf{less}(x, y) = \mathsf{true}, \Gamma; \omega \rangle \\ \langle \Delta, \Gamma; \omega \rangle\end{array}}$$

Beachte

Ist Δ ein Lemma, so ist das letzte Teilziel leicht zu beweisen, z. B. durch Subsumption. Dies gilt z. B., wenn Δ schon bewiesen, eine definierende Gleichung oder allgemeingültig ist.

Fallunterscheidung nach Substitutionen (1)

Beachte

Γ ist gültig genau dann, wenn für jede induktive Substitution $\sigma(\Gamma)$ gültig ist.

Also ist es sinnvoll, alle $\sigma(\Gamma)$ durch eine Fallunterscheidung zu „überdecken".

Definition 4.24

Eine Menge $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ von Konstruktorsubstitutionen heißt eine **Überdeckung** für Γ, falls es zu jeder induktiven Substitution σ ein $\sigma_i \in \Sigma$ und ein τ gibt mit $\sigma(x) = \tau(\sigma_i(x))$ für alle $x \in \mathsf{Var}(\Gamma) \cap V^C$.

Beispiel zu Überdeckungen

Beispiel

Sei $\mathsf{var}(\Gamma) = \{x, y\}$ und $C = \{0, s\}$. Überdeckungen zu Γ sind Σ_1 bis Σ_4 mit

Σ_1:

x	y
0	0
0	$s(y)$
$s(x)$	0
$s(x)$	$s(y)$

Σ_2:

x	y
0	y
$s(x)$	0
$s(x)$	$s(y)$

Σ_3:

x	y
0	y
$s(x)$	y

Σ_4:

x	y
0	y
$s(0)$	y
$s^2(x)$	y

Also: Σ_1 (bzw. Σ_4) besteht aus den 4 (bzw. 3) Substitutionen wie in der Tabelle angegeben.

Fallunterscheidung nach Substitutionen (2)

Sei $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ eine Überdeckung zu Γ.

Regel Fallunterscheidung mit Σ

$$\frac{\langle \Gamma; \omega \rangle}{\langle \sigma_1(\Gamma); \sigma_1(\omega) \rangle \cdots \langle \sigma_n(\Gamma); \sigma_n(\omega) \rangle}$$

Beispiel Ackermann-Funktion

$$\begin{aligned} E : \; & a(0, y) = s(y) \\ & a(s(x), 0) = a(x, s(0)) \\ & a(s(x), s(y)) = a(x, a(s(x), y)) \end{aligned}$$

Zu zeigen sei die Gültigkeit von $\Gamma = \{\mathrm{def}(a(x, y))\}$, also dass a total definiert ist.

Die Definition von a liefert, dass Σ_2 (von Folie 142) eine sinnvolle Überdeckung ist. Also ergibt sich

$$\frac{\langle \mathrm{def}(a(x, y)); \omega(x, y) \rangle}{\langle \mathrm{def}(a(0, y)); \omega(0, y) \rangle \quad \langle \mathrm{def}(a(s(x), 0)); \omega(s(x), 0) \rangle \quad \langle \mathrm{def}(a(s(x), s(y))); \omega(s(x), s(y)) \rangle}$$

Applikative Inferenzregeln (1)

Beachte

Bisher waren alle Inferenzregeln nicht-applikativ.

Sinn einer applikativen Inferenzregel:

$$\frac{\langle \Gamma; \omega \rangle}{\langle \Gamma_1; \omega \rangle \cdots \langle \Gamma_n; \omega \rangle} \quad \text{mit } \langle \Pi; \omega' \rangle^{\mathcal{U}}$$

Sie wendet das „Wissen“ Π instanziert (d. h. in der Form $\mu(\Pi)$) auf Γ an. Dabei ist das Wissen Π entweder sicher (Anwendung eines Lemmas, dann ist $\mathcal{U} = \mathcal{L}$) oder induktiv (Anwendung einer Induktionshypothese, dann ist $\mathcal{U} = \mathcal{I}$).

Probleme

a) Ist $\mathcal{U} = \mathcal{I}$, so muss $\mu(\omega') < \omega$ sicher gestellt sein.

b) $\mu(\Pi)$ ist nur dann eine zulässige Instanz von Π, wenn $\mu(x) \in \mathrm{Term}(C, V^C)$ für alle $x \in \mathrm{Var}(\Pi) \cap V^C$ ist. Was macht man, wenn dies nicht gilt?

c) Manchmal sind noch nicht alle logischen Voraussetzungen für die Anwendung von Π bewiesen. Wie holt man diese Beweise nach?