5.2 Bedingte Regelsysteme

Informeller Ansatz:

Regel: $l \to r \Leftarrow u = v$
genauer: $l \to r \Leftarrow u_1 = v_1, \ldots, u_n = v_n$

Problem: Auswertung der Bedingungen bei der Definition von $\longrightarrow_R$

1. Problem: Extra-Variablen

$x \in \mathsf{Var}(r, u, v) - \mathsf{Var}(l)$ heißt **Extra-Variable** in $l \to r \Leftarrow u = v$.

Beispiel „list of squares“

$\mathsf{lsq}(\mathsf{nil}) \to \mathsf{nil}$
$\mathsf{lsq}(x.l) \to x.\mathsf{lsq}(\mathsf{l}) \Leftarrow x = y^2$
$\mathsf{lsq}(x.l) \to \mathsf{lsq}(\mathsf{l}) \Leftarrow y^2 < x = \mathsf{true}, x < s(y)^2 = \mathsf{true}$

Man muss y bei gegebenen x, l raten.

$\Rightarrow$ Wir verbieten später Extravariable.

Auswertung der Bedingungen

2. Problem: Suchraum beschränken

$u = v$ auswerten als

a) $u \stackrel{*}{\longleftrightarrow} v$ volle Suche

b) $u \downarrow v$ eingeschränkte Suche

c) $u \stackrel{*}{\longrightarrow} v$ sehr restriktive Suche

Vor- und Nachteil

a) $\longrightarrow_R$ ist mächtig, teuer zu berechnen.

b) Dies ist ein guter Kompromiss.

c) $\longrightarrow_R$ ist schwach, leicht zu berechnen.

Auswertung der Bedingungen (Forts.)

Bezeichnungen

$l \to r \Leftarrow u \overset{*}{\longleftrightarrow} v$	R^{se}	semi-equational system.
$l \to r \Leftarrow u \downarrow v$	R^{j}	join system.
$l \to r \Leftarrow u \overset{*}{\longrightarrow} v$	R^{o}	oriented system.

Hier

Schreibweise $l \to r \Leftarrow u = v$,

gemeint ist $l \to r \Leftarrow u \downarrow v$,

Ausnahmen werden extra erwähnt.

Frage zu a), b), c)

Wann gilt $\overset{*}{\longleftrightarrow}_R \; = \; =_R$?

Schreibweise

$u \downarrow v$ steht für $u_1 \downarrow v_1 \wedge \cdots \wedge u_n \downarrow v_n$.

Analog: $u \overset{*}{\longleftrightarrow} v$, $u \overset{*}{\longrightarrow} v$.

Definitionen: R und $\longrightarrow_R$

Definition 5.9

Eine **(bedingte) Regel** hat die Form

$l \to r \Leftarrow u = v$ mit

(1) $l \notin V$,

(2) Var$(r, u, v) \subseteq$ Var(l)

Ein **Regelsystem** ist eine Menge von bedingten Regeln.

$\Rightarrow$ Jede unbedingte Regel ist auch eine bedingte Regel (mit $n = 0$ Bedingungen).
Schreibweise $l \to r$ statt $l \to r \Leftarrow$

Definition 5.10 zu $\longrightarrow_R$, 1. Ansatz

$s \longrightarrow_R t \text{ gdw}$ Es gibt $l \to r \Leftarrow u = v$ in R, $p \in O(s), \sigma$ mit

- $s/p \equiv \sigma(l), t \equiv s[p \leftarrow \sigma(r)]$
- $\sigma(u) \downarrow \sigma(v)$

$\Rightarrow$ übliche Definition
etwas ungenau, da rekursiv
siehe 2. Ansatz

Definition von $\longrightarrow_R$ durch Approximation

Definition 5.11 zu $\longrightarrow_R$, 2. Ansatz.

Sei R ein Regelsystem. Definiere (unbedingte) R_i und damit $\longrightarrow_i = \longrightarrow_{R_i}$ wie früher durch

$R_0 = \varnothing$.

$$R_{i+1} = \{\sigma(l) \to \sigma(r) \mid l \to r \Leftarrow u = v \text{ in } R, \\ \sigma(u) \downarrow_i \sigma(v)\}$$

Dann

$$s \longrightarrow_R t \text{ gdw } \exists k : s \longrightarrow_k t$$

Beispiel

Sei

R: $x < s(x) \to \text{true}$
$\quad x < s(y) \to \text{true} \Leftarrow x < y = \text{true}$

Dann

$x < s(x) \to \text{true in } R_1$
$x < s^2(x) \to \text{true in } R_2$
$\cdots$
$x < s^i(x) \to \text{true in } R_i$

Erste Ergebnisse

$\xrightarrow{*}_R$, $\xleftrightarrow{*}_R$, $\downarrow_R$ sind wie üblich zu $\longrightarrow_R$ definiert.

Beachte

1. Induktion nach i zeigt $R_i \subseteq R_{i+1}$.
2. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\longrightarrow_k$ ist abgeschlossen bezüglich Substitutionen und der Termersetzung.
   Also: $\longrightarrow_R$ ist abgeschlossen bezüglich Substitutionen und der Termersetzung.
3. Sei $\succ$ Reduktionsordnung und $l \succ r$ für alle $l \to r \Leftarrow u = v$ in R.
   Dann ist $\longrightarrow_R$ terminierend.
4. $E(R) = \{l = r \Leftarrow u = v \mid l \to r \Leftarrow u = v \text{ in } R\}$
   ist das unterliegende Gleichungssystem zu R.
   Wir schreiben $=_R$ statt $=_{E(R)}$.

Fragen:

Ist $\longrightarrow_R$ berechenbar?

Gilt $\xleftrightarrow{*}_R \;=\; =_R$?

Zu: $\stackrel{*}{\longleftrightarrow}_R \; = \; =_R$? (1)

Lemma 5.2

Sei R ein Regelsystem. Es gilt

a) Für alle i : $\longrightarrow_i \subseteq =_i$ (also $\stackrel{*}{\longleftrightarrow}_i \subseteq =_i$).

b) $\stackrel{*}{\longleftrightarrow}_R \subseteq =_R$, i. Allg. gilt **nicht** $\stackrel{*}{\longleftrightarrow}_R = =_R$.

Beweis:

a) Induktion nach i liefert
$l \to r$ in $R_i \qquad \leadsto l = r$ in E_i.

b) 1) $\stackrel{*}{\longleftrightarrow}_R \subseteq =_R$ folgt aus a).
2) Sei

$$\begin{aligned} R:\quad & a \to b \\ & a \to c \\ & a \to d \Leftarrow b = c \end{aligned}$$

Es gilt $a =_R d$, nicht $a \longrightarrow_R d$, $a \stackrel{*}{\longleftrightarrow}_R d$,
also $\stackrel{*}{\longleftrightarrow}_R \neq =_R$.

Hier ist
$E = E(R)$, R als Gleichungssystem,
E_i wie in Approximation von $=_E$,
R_i wie in Approximation von $\longrightarrow_R$.

Zu: $\stackrel{*}{\longleftrightarrow}_R \; = \; =_R$? (2)

Satz 5.3.

Sei R ein konfluentes Regelsystem.
Dann gilt $=_R \; = \; \downarrow_R \; = \; \stackrel{*}{\longleftrightarrow}_R$.

Definition 5.12

R heißt **Ebenen-konfluent**, falls jedes $\longrightarrow_i$ konfluent ist.

Beispiel

$$\begin{aligned} R:\quad & a \to b \\ & a \to c \\ & b \to c \Leftarrow a = c \end{aligned}$$

Dann ist $\longrightarrow_1$ **nicht** konfluent,
nicht $\downarrow_1 \; = \; =_1$,
$\longrightarrow_R$ **ist** konfluent,
es gilt $\downarrow_R \; = \; =_R$.

R ist konfluent, aber nicht Ebenen-konfluent!

Beweis zu Satz 5.3

a) Sei $l \to r \Leftarrow u = v$ in R, $\sigma(u) \downarrow_R \sigma(v)$.
Dann gilt $\sigma(l) \longrightarrow_R \sigma(r)$.
Denn: $\exists j : \sigma(u) \downarrow_j \sigma(v)$, also $\sigma(l) \longrightarrow_{j+1} \sigma(r)$.
Also $\sigma(l) \longrightarrow_R \sigma(r)$.

b) $=_i \subseteq \downarrow_R$: Induktion nach i:
$i = 0$: $=_0 = id \subseteq \downarrow_R$.
$i \leadsto i+1$: Sei $s \longmapsto\!\!\!\dashv_{i+1} t$ mit $l \to r \Leftarrow u = v, \sigma$.
Dann $\sigma(u) =_i \sigma(v)$, also $\sigma(u) \downarrow \sigma(v)$ nach I.V.
Dann $\sigma(l) \longrightarrow_R \sigma(r)$ nach a), also $s \overset{*}{\longleftrightarrow}_R t$.
Also $\longmapsto\!\!\!\dashv_i \subseteq \overset{*}{\longleftrightarrow}_R$, also $=_i \subseteq \overset{*}{\longleftrightarrow}_R = \downarrow_R$.

c) $=_R \subseteq \downarrow_R$:
Sei $s =_R t$. Dann $\exists i : s =_i t$, also $s \downarrow_R t$ nach b).

d) $=_R = \downarrow_R$: Es gilt
$=_R \subseteq \downarrow_R$ nach c)
$=_R \supseteq \downarrow_R$ nach Lemma 5.2.

Zu R^{se}

Beachte

R^j ist i. Allg. zu schwach: $\overset{*}{\longleftrightarrow}_{R^j} \neq =_R$.

Ziel:

Dies gilt nicht für R^{se}.

Definition 5.13

Sei R ein Regelsystem. Setze ($\longrightarrow_i = \longrightarrow_{R_i^{se}}$).

$R_0^{se} = \varnothing$.

$$R_{i+1}^{se} = \{\sigma(l) \to \sigma(r) \mid l \to r \Leftarrow u = v \text{ in } R, \; \sigma(u) \overset{*}{\longleftrightarrow}_i \sigma(v)\}$$

$s \longrightarrow_{R^{se}} t \text{ gdw } \exists i : s \longrightarrow_i t$.

Lemma 5.3

Es gilt stets $=_R = \overset{*}{\longleftrightarrow}_{R^{se}}$.

Beweis: Sei $E = E(R)$, E_i wie stets. Induktion nach i zeigt

$$\overset{*}{\longleftrightarrow}_{R_i^{se}} = =_{E_i}$$

Also $\overset{*}{\longleftrightarrow}_{R^{se}} = =_R$

Zur Berechenbarkeit von $\longrightarrow_R$

Ab jetzt wieder $R = R^j$.

Erinnerung

Die Definition von $\longrightarrow_R$ ist rekursiv.
Also ist die Berechnung von $\longrightarrow_R$ vermutlich schwer.

Jetzt

Man kann in R Suchprobleme kodieren, die rekursiv aufzählbar sind.

Satz 5.4.

Folgendes Problem ist unentscheidbar.

Eingabe:	R endlich und terminierend, t ein Term.
Frage:	Ist t in R reduzierbar?

Beweis-Idee: Reduktion dieses Problems auf das PCP.

Erinnerung zum PCP über Alphabet Σ.

Eingabe:	$A = (u_1, \ldots, u_n)$	Listen über Σ.
	$B = (v_1, \ldots, v_n)$	$u_i, v_i \in \Sigma^*$
Frage:	Gibt es $1 \leq i_j \leq n$ mit $u_{i_1} \cdots u_{i_m} \equiv v_{i_1} \cdots v_{i_m}$?	

Beweis zu Satz 5.4

a) Sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_r\}$, $\bar{a}_i \in F$ einstellig, $i = 1, \ldots, n$.
Zu $u \equiv a_{j1} \cdots a_{jk} \in \Sigma^*$ sei

$$\bar{u}(x) \equiv \bar{a}_{j1}(\cdots(\bar{a}_{jk}(x))\cdots) \in \mathrm{Term}(F, V)$$

b) Zu $A = (u_1, \ldots, u_n)$, $B = (v_1, \ldots, v_n)$
betrachte $F = \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r, p, 1, \mathrm{true}, \mathrm{false}\}$

$$
\begin{array}{ll}
R_{AB}: & p(x,y) \to \mathrm{true} \Leftarrow \bar{u}_1(x) = \bar{v}_1(y) \\
& \cdots \\
& p(x,y) \to \mathrm{true} \Leftarrow \bar{u}_n(x) = \bar{v}_n(y) \\
& p(x,y) \to \mathrm{true} \Leftarrow p(\bar{u}_1(x), \bar{v}_1(y)) = \mathrm{true} \\
& \cdots \\
& p(x,y) \to \mathrm{true} \Leftarrow p(\bar{u}_n(x), \bar{v}_n(y)) = \mathrm{true}
\end{array}
$$

Es gilt mit $R = R_{AB}$, $\longrightarrow \; = \; \longrightarrow_R$:

$$\bar{u}(1) \downarrow \bar{v}(1) \text{ gdw } u \equiv v$$

$$p(\bar{u}(1), \bar{v}(1)) \downarrow \mathrm{true} \text{ gdw } p(\bar{u}(1), \bar{v}(1)) \to \mathrm{true}$$

Beweis zu Satz 5.4 (Forts.)

Also

$t \equiv p(1,1)$ ist in R reduzierbar

- gdw $\exists 1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq n :$
$$\bar{u}_{i_1}(\cdots \bar{u}_{i_m}(1) \cdots) \equiv \bar{v}_{i_1}(\cdots \bar{v}_{i_m}(1) \cdots)$$

- gdw $\exists 1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq n : u_{i_1} \cdots u_{i_m} \equiv v_{i_1} \cdots v_{i_m}$

- gdw PCP(A, B)

Also: Die R-Reduzierbarkeit ist unentscheidbar.

Verkleinernde Regelsysteme (1)

Frage: Wann ist $\longrightarrow_R$ entscheidbar?

Idee: Es reicht, wenn stets in $l \to r \Leftarrow u = v$ die Bedingungen $u = v$ „kleiner" sind als die Konklusion $l = r$.

Dann: Die Rekursion in der Auswertung von $l \to r \Leftarrow u = v$ terminiert.

Frage: Was heißt kleiner?

Idee:

- Wir vergleichen die Terme in $l \to r \Leftarrow u = v$.
- Die Ordnung muss Noethersch sein!
- Sie erzeugt Noethersche Ordnung auf den Gleichungen $s = t$.
- Man benötigt Verträglichkeit von $\succ$ mit Substitutionen(?) und der Termstruktur (?)

Es gibt unterschiedlich starke Ansätze.

Verkleinernde Regelsysteme (2)

Definition 5.14

Sei R Regelsystem über sig $= (S, F, \tau)$.

a) R heißt **simplifizierend**:
Es gibt eine Simplifikationsordnung $\succ$ mit
$l \to r \Leftarrow u = v$ in R impliziert $l \succ r, u_i, v_i$.

b) R heißt **reduktiv**:
Es gibt eine Reduktionsordnung $\succ$ mit
$l \to r \Leftarrow u = v$ in R impliziert $l \succ r, u_i, v_i$.

c) R heißt **verkleinernd (decreasing)**:
Es gibt eine Noethersche Partialordnung $\succ$ mit
1) $\longrightarrow_R \cup >_{TT} \subseteq \succ$.
2) Ist $l \to r \Leftarrow u = v$ in R und σ eine Substitution, so gilt $\sigma(l) \succ \sigma(u_i), \sigma(v_i)$

Vergleich der Begriffe

Beachte

a) Sei $\succ$ eine Reduktionsordnung und $\succ_e = (\succ \cup >_{TT})^+$. Dann ist $\succ_e$ eine Noethersche Partialordnung. Sie ist verträglich mit Substitutionen, i. Allg. aber nicht mit der Termstruktur.

b) Ist R simplifizierend, so ist R auch reduktiv. Ist R reduktiv, so ist R auch verkleinernd.

Beispiele

a) $R: x < s(x) \to$ true
$x < s(y) \to$ true $\Leftarrow x < y =$ true
ist simplifizierend bezüglich der RPO zur Präzedenz $< >_F$ true.

b) $R: f(f(x)) \to f(g(f(x)))$
ist reduktiv, aber nicht simplifizierend.

c) $R: f(x) \to f(a) \Leftarrow x = b$
ist verkleinernd bezüglich der RPO zur Präzedenz $f >_F b >_F a$, aber nicht reduktiv.

Berechenbarkeit von $\longrightarrow_R$

Satz 5.5.

Sei R endlich und verkleinernd.

a) Zu jedem endlichen Gleichungssystem $E = \{s_i = t_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ ist es entscheidbar, ob $s_i \downarrow_R t_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt.

b) Zu je 2 Termen s, t ist es entscheidbar, ob $s \longrightarrow_R t$ gilt.

c) Zu jedem s ist die Menge $\Delta_R(s) = \{t \mid s \longrightarrow_R t\}$ berechenbar.

Beachte

$s \longrightarrow_R t$ mit $l \to r \Leftarrow u = v$, σ, p

$\mathrm{gdw}\ \sigma(u) \downarrow_R \sigma(v)$, $s/p \equiv \sigma(l)$, $t \equiv s[p \leftarrow \sigma(r)]$.

Also: b) folgt aus a), c) folgt aus b)

Beachte

Satz 5.5 gilt erst recht, wenn R reduktiv ist.

Beweis zu Satz 5.5

Sei R verkleinernd bezüglich $\succ$.

Definiere die Ordnung $\succ_0$ auf Gleichungssystemen E

$M(E) = \{s, t \mid s = t \text{ in } E\}$

$E \succ_0 E'$ gdw $M(E) \ggcurly M(E')$

Betrachte das Inferenzsystem $I_\downarrow$

(1) $$\frac{E \cup \{s \doteq t\}}{E \cup \{s' = t, \sigma(u_1) = \sigma(v_1), \ldots, \sigma(u_n) = \sigma(v_n)\}}$$

falls $s \longrightarrow s'$ mit $l \to r$ und σ und $l \to r \Leftarrow u = v$ in R.

(2) $$\frac{E \cup \{s = s\}}{E}$$

Es gilt

a) $E \vdash_{I_\downarrow} E'$ impliziert $E \succ_0 E'$

b) $s \downarrow_R t$ für alle $s = t$ in E gdw $E \overset{*}{\vdash}_{I_\downarrow} \varnothing$

Also:

- $I_\downarrow$ spannt bei Eingabe E einen endlichen Suchraum auf.
- Wegen b) ist es entscheidbar, ob $s \downarrow_R t$ für alle $s = t$ in E gilt.

Beispiel zum Beweis zu Satz 5.5 a)

Sei

R: a) $x \leq x \to \mathsf{true}$

b) $s(x) \leq x \to \mathsf{false}$

c) $x \leq s(y) \to \mathsf{true} \Leftarrow x \leq y = \mathsf{true}$

d) $s(x) \leq y \to \mathsf{false} \Leftarrow x \leq y = \mathsf{false}$

$E = \{s(x) \leq s^2(x) = \mathsf{true}\}$

Beispiel zum Beweis zu Satz 5.5 a) (Forts.)

Es ergibt sich

$$\{s(x) \leq s^2(x) = \mathsf{true}\}$$

$$\xrightarrow{(1,d)} \{\mathsf{true} = \mathsf{false},\ x \leq s^2(x) = \mathsf{false}\}$$

$$\xrightarrow{(1,c)} \{\mathsf{true} = \mathsf{false},\ x \leq s(x) = \mathsf{true}\}$$

$$\xrightarrow{(1,c)} \{\mathsf{true} = \mathsf{false},\ \mathsf{true} = \mathsf{true},\ x \leq x = \mathsf{true}\}$$

$$\xrightarrow{(1,a)} \{\mathsf{true} = \mathsf{false},\ \mathsf{true} = \mathsf{true}\}$$

$$\xrightarrow{(2)} \{\mathsf{false} = \mathsf{true}\}$$

Stopp

Misserfolg

$$\{s(x) \leq s^2(x) = \mathsf{true}\}$$

$$\xrightarrow{(1,c)} \{\mathsf{true} = \mathsf{true},\ s(x) \leq s(x) = \mathsf{true}\}$$

$$\xrightarrow{(1,a)} \{\mathsf{true} = \mathsf{true}\}$$

$$\xrightarrow{(2)} \varnothing$$

Erfolg!