4.4 A-verträgliche Reduktionsordnungen

Problem

Gegeben: A (und R).
Gesucht: A-verträgliche Reduktionsordnung $\succ$ (mit $R \subseteq \succ$).
Dann: R/A ist terminierend.

Definition 4.24

Eine Quasiordnung $\succeq$ ist eine **Quasi-Reduktionsordnung**, falls gilt

- $\succeq$ ist verträglich mit Substitutionen und der Termstruktur.
- $\succ$ ist eine Reduktionsordnung.

Erinnerung

Sei $\succeq$ Quasiordnung auf Term(F, V).

Dann ist $\approx \, = \, \succeq \cap \preceq$.

Beachte

Sei $\succeq \, = \, \succ \cup =_A$. Dann gilt:

Ist $\succ$ eine A-verträgliche Partialordnung,
so ist $\succeq$ eine A-verträgliche Quasiordnung.

4.4.1 Polynomordnungen

Erinnerung

$\succeq$ ist A-verträglich, falls gilt

$$s' =_A s \succeq t =_A t' \leadsto s' \succeq t'$$

Lemma 4.13

Sei $\succeq$ eine Quasi-Reduktionsordnung, $A \subseteq \approx$.

Dann sind $\succ$ und $\succeq$ A-verträglich.

Beweis:

a) $=_A \subseteq \approx$:
Dies gilt, da $\succeq$ verträglich ist mit Substitutionen und der Termstruktur.

b) $\succeq$ ist A-verträglich:
Dies folgt aus a)

c) $\succ$ ist A-verträglich:
$s' =_A s \succ t =_A t'$
$\leadsto s' \approx s \succ t \approx t'$
$\leadsto s' \succeq t'$ und nicht $s' \approx t'$
$\leadsto s' \succ t'$

Polynomordnungen (1)

Beachte

Sei $\succeq$ Polynomordnung zu φ

$$s \succeq t \text{ gdw } \varphi(s) \geq \varphi(t)$$

$\geq$ = identisch auf $\mathbb{N}_k$.

Dann ist $\succeq$ eine Quasi-Reduktionsordnung.

Definition 4.25

Sei A Menge von Assoziativ- und Kommutativ-Axiomen.

$f \in F_{\mathsf{AC}}$ gdw A enthält Ass.- und Komm.-Axiom zu f.
$f \in F_{\mathsf{Ass}}$ gdw A enthält Ass.-Axiom zu f.
$f \in F_{\mathsf{Kom}}$ gdw A enthält Komm.-Axiom zu f.

Bezeichnung Sei f 2-stellig.

$\varphi(f)$ heißt assoziativ, falls $\varphi(f(f(x,y),z)) = \varphi(f(x,f(y,z)))$.

$\varphi(f)$ heißt kommutativ, falls $\varphi(f(x,y)) = \varphi(f(y,x))$.

Lemma 4.14

Sei $\succeq$ Polynomordnung zu φ auf $\mathbb{N}_k$,
$\varphi(f)$ assoziativ und kommutativ, falls $f \in F_{\mathsf{AC}}$,
$\varphi(f)$ assoziativ, falls $f \in F_{\mathsf{Ass}}$,
$\varphi(f)$ kommutativ, falls $f \in F_{\mathsf{Kom}}$.

Dann ist $\succeq$ eine Quasi-Reduktionsordnung mit $A \subseteq \approx$, also $\succ$ eine A-verträgliche Reduktionsordnung.

Polynomordnungen (2)

Lemma 4.15

$\varphi(f)$ ist assoziativ und kommutativ gdw

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(f)(x,y) = axy + b(x+y) + c \\ \text{mit } ac + b = b^2\end{array}\right\} (*)$$

Satz 4.10.

Sei A Menge der Assoziativ- und Kommutativ-Axiome zu $f \in F_{\mathsf{AC}} \subseteq F$. Für jedes $f \in F_{\mathsf{AC}}$ gelte (*). Dann ist $\succeq$ eine Quasi-Reduktionsordnung mit $A \subseteq \approx$, also $\succ$ eine A-verträgliche Reduktionsordnung.

Beispiel

R: $x + 0 \to x \qquad x + s(y) \to s(x+y)$
A: $+$ ist AC
$\succeq$: $\varphi(0) = 2$, $\varphi(s)(x) = x + 1$, $\varphi(+)(x,y) = x \cdot y$

Also: $\succ$ ist AC-verträglich, $R \subseteq \succ$.

Also ist R/A terminierend.

Polynomordnungen (3)

Lemma 4.16 Lexikographische Kombination

Seien $\succeq_1, \succeq_2$ Quasi-Reduktionsordnungen mit $A \subseteq \approx_i$:

$$s \succeq t \text{ gdw } s \succ_1 t \text{ oder } s \approx_1 t, s \succeq_2 t$$

Dann ist $\succeq$ eine Quasi-Reduktionsordnung mit $A \subseteq \approx$, also $\succ$ eine A-verträgliche Reduktionsordnung.

Beispiel

R: (1) $x + 0 \to x$ (2) $x + s(y) \to s(x+y)$
(3) $x \cdot 0 \to 0$ (4) $x \cdot s(y) \to (x \cdot y) + x$
A: $+, \cdot$ sind AC

$\succeq_1$: $\varphi_1(0) = 2$ $\quad \varphi_1(+)(x,y) = x + y$
$\varphi_1(s)(x) = x + 2$ $\quad \varphi_1(\cdot)(x,y) = x \cdot y$

$\succeq_2$: $\varphi_2(0) = 2$ $\quad \varphi_2(+)(x,y) = x \cdot y$
$\varphi_2(s)(x) = x + 2$ $\quad \varphi_2(\cdot)(x,y) = x \cdot y$

Also: $x + 0 \succ_1 x$ $\quad x + s(y) \approx_1 s(x+y)$
$x \cdot 0 \succ_1 0$ $\quad x \cdot s(y) \succ_1 (x \cdot y) + x$
$x + s(y) \succ_2 s(x+y)$

Also gilt $R \subseteq \succ$, also ist R/A terminierend.

4.4.2 Die assoziative Pfadordnung

Ziel

Die RPOS (RPO mit Status) so modifizieren, dass sie A-verträglich wird.

1. Ziel: Nur Kommutativ-Axiome.

Definition 4.26

Ein **Permutations-Axiom** hat die Form

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$$

$\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ ist eine Permutation.

Satz 4.11.

Sei

- A Menge von Permutationsaxiomen,
- $\succeq$ die RPOS zur Präzedenz $>_F$ und zum Status τ,
- $\tau(f)$=mult, falls Permutationsaxiom zu f in A.

Dann ist $\succeq$ eine Quasi-Reduktionsordnung mit $A \subseteq \approx$, also $\succ$ eine A-verträgliche Reduktionsordnung.

Probleme im AC-Fall

Beachte

Eine RPOS $\succ$ ist i. Allg. **keine** AC-verträgliche Reduktionsordnung.

Beispiel

Sei $a >_F b >_F c$, $\tau(+)$=mult, $+$ ist AC.

Dann gilt $b + b \succ_{\mathsf{rpo}} b + c$,

aber $(b + b) + a \prec_{\mathsf{rpo}} (a + b) + c =_{\mathsf{AC}} (b + c) + a$.

Ausweg

Terme s und t vor dem Vergleich erst transformieren in $\bar{s}, \bar{t}$, dann vergleichen:

$$s \succ_0 t \text{ gdw } \bar{s} \succ_{\mathsf{rpo}} \bar{t}$$

Hier

Transformation = Abflachen.

Beispiel

$$s \equiv (b + b) + a \text{ liefert } \bar{s} = +(b, b, a)$$

Also

Jedes AC-Symbol hat variable Stelligkeit.

Abflachung

Sei A = Menge der AC-Axiome zu den $f \in F_{\mathsf{AC}}$

Definition 4.27

Der Abflachoperator $\bar{\cdot}$ zu $F_{\mathsf{AC}} \subseteq F$ ist so definiert:

Sei $t \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$, dann ist

$$\bar{t} = \begin{cases} t & t \in F \cup V \\ f(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n) & f \notin F_{\mathsf{AC}}, n \geq 1 \\ t_0 & f \in F_{\mathsf{AC}} \end{cases}$$

Dabei entsteht t_0 aus t durch Ersetzen der t_i durch

$s_1, \ldots, s_m$	falls $\bar{t}_i = f(s_1, \ldots, s_m)$
$\bar{t}_i$	falls top$(t_i) \neq f$

Beispiel $+, \cdot$ seien AC.

$t \equiv (a + (b + c)) + d$ liefert $\bar{t} \equiv +(a, b, c, d)$

$t \equiv ((a \cdot b) \cdot a + (b \cdot a)) + (a \cdot (b \cdot a) + b)$

Also: $\bar{t} \equiv +(\cdot(a, b, a), \cdot(b, a), \cdot(a, b, a), b)$

Beachte

1. Es gilt $t =_A \bar{t}$.
2. Sei $s \succeq_0 t$ gdw $\bar{s} \succeq \bar{t}$. Ist $\succeq$ A-verträglich, so ist es auch $\succeq_0$.

Die APO

Definition 4.28

Die RPOS $\succeq_{\mathsf{rpo}}$ zur Präzedenz $>_F$ und zum Status τ erfüllt die strenge **assoziative Pfadbedingung (APB)**, falls jedes $f \in F_{\mathsf{AC}}$ den Status $\tau(f)$=mult hat und minimal in der Präzedenz $>_F$ ist.

Dann ist die **assoziative Pfadordnung (APO)** zu $>_F$ und τ erklärt durch

$$s \succeq_{\mathsf{apo}} t \text{ gdw } \bar{s} \succeq_{\mathsf{rpo}} \bar{t}$$

Satz 4.12.

Sei A eine Menge von AC-Axiomen. Dann ist jede APO $\succeq$ eine Quasi-Reduktionsordnung mit $A \subseteq \approx$, also $\succ$ eine A-verträgliche Reduktionsordnung.

Beispiel

$$\begin{array}{lll} R: & \neg(x \wedge y) \to \neg x \vee \neg y & \qquad A: \quad \wedge, \vee \text{ sind AC} \\ & \neg(x \vee y) \to \neg x \wedge \neg y & \\ & \neg\neg x \to x & \end{array}$$

Sei $\succ$ die APO zu $\neg >_F \wedge$, $\neg >_F \vee$.

Es gilt $R \subseteq \succ$, also ist R/A terminierend.

Bemerkungen

Beachte

Die strenge APB ist wichtig im letzten Satz.

Beispiel

Sei $f >_F g$ und $f \in F_{\mathsf{AC}}$. Dann gilt die strenge APB nicht. Es gilt (1) und (2).

$$f(a,b) \succ_{\mathsf{apo}} g(a,b) \qquad (1)$$
$$f(f(a,b),c) \prec_{\mathsf{apo}} f(g(a,b),c) \qquad (2)$$

Also ist $\succ_{\mathsf{apo}}$ keine Reduktionsordnung.

Zu (2): Es ist

$$\overline{f(f(a,b),c)} \equiv f(a,b,c) \prec_{\mathsf{rpo}} f(g(a,b),c) \equiv \overline{f(g(a,b),c)}$$

Bemerkungen

1. Die Verwendung von Termtransformationen zur Definition von Reduktionsordnungen ist recht mächtig und wird häufig angewandt.
2. Man kann die strenge APB abschwächen und so mit zusätzlichen Termtransformationen auch mit schwächeren Forderungen an die Präzedenz $>_F$ AC-verträgliche Reduktionsordnungen definieren.

4.4.3 Knuth-Bendix-Ordnungen

Ziel

Konstruktion AC-verträglicher KB-Ordnungen.

Idee

Die $f \in F$ haben einen Status stat(f).

stat(f)=mult, falls $f \in F_{\mathsf{AC}}$.

$s \succeq_0 t$ gdw $\bar{s} \succeq_{\mathsf{kbo}} \bar{t}$ (also erst abflachen, dann KBO-Vergleich).

Definition 4.29

Die KBO $\succeq$ zur Präzedenz $>_F$, Interpretation φ und Status stat erfüllt die **AC-Bedingung**, falls für jedes $f \in F_{\mathsf{AC}}$ gilt: (1) $\varphi(f) = 0$, (2) stat(f)=mult und (3) f ist minimal in der Präzedenz $>_F$.

Satz 4.13.

Die KBO $\succeq$ erfülle die AC-Bedingung. Definiert man $\succeq_0$ durch $s \succeq_0 t$ gdw $\bar{s} \succeq \bar{t}$, so ist $\succeq_0$ eine Quasi-Reduktionsordnung mit $A \subseteq \approx_0$, also $\succ_0$ eine A-verträgliche Reduktionsordnung.

5 Bedingte Regelsysteme

5.1 Bedingte Spezifikationen

Spezifikation spec = (sig, E)

Bisher: unbedingte Gleichungen in E.

Jetzt: bedingte Gleichungen in E.

$s = t \Leftarrow C$ $\qquad$ C Bedingung

$C \equiv u_1 = v_1 \wedge \cdots \wedge u_n = v_n$

Motivation stärkere Ausdruckskraft.

Beachte

- nur „positive Bedingungen“, also $u_i \neq v_i$ nicht erlaubt.
- Bedingungen und-verknüpft.
- Disjunktion vermeidbar.
  $s = t \Leftarrow C_1 \vee C_2$
  ist logisch äquivalent zu
  $s = t \Leftarrow C_1$
  $s = t \Leftarrow C_2$

Definitionen/Schreibweisen

Definition 5.1

Eine **(bedingte) Spezifikation** hat die Form spec $=$ (sig, E) mit

- sig $= (S, F, \tau)$ Signatur.
- E System bedingter Gleichungen.

Schreibweise

Sei $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$:

- $s = t \Leftarrow u = v$ statt $s = t \Leftarrow u_1 = v_1, \ldots, u_n = v_n$
- $s = t$ statt $s = t \Leftarrow \qquad (n = 0)$
- $\sigma(u) = \sigma(v)$ statt $\sigma(u_i) = \sigma(v_i)$, $i = 1, \ldots, n$, falls σ Substitution.

Ab jetzt: „Spezifikation“ meint „bedingte Spezifikation“.

Modelltheoretische Semantik

Sei spec $=$ (sig, E) eine Spezifikation, sig $= (S, F, \tau)$.

Definition 5.2

Modelle von spec

Sei $\mathcal{A} = ((A_s)_{s \in S}, (f^{\mathcal{A}})_{f \in F})$ eine sig-Algebra: $A = \bigcup\limits_{s \in S} A_s$

- Eine **Belegung** $\varphi : V_s \to A_s$, $s \in S$ ordnet den Variablen Werte aus $\mathcal{A}$ zu. φ wird fortgesetzt zu φ: Term$(F, V) \to A$ durch
  $\varphi(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{A}}(\varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_n))$.
- $(\mathcal{A}, \varphi)$ **erfüllt** $s = t \Leftarrow u = v$, falls in $\mathcal{A}$ gilt:
  $\forall i : \varphi(u_i) = \varphi(v_i)$ impliziert $\varphi(s) = \varphi(t)$.
- $\mathcal{A}$ **erfüllt** $s = t \Leftarrow u = v$, falls für alle φ gilt:
  $(\mathcal{A}, \varphi)$ erfüllt $s = t \Leftarrow u = v$.
- $\mathcal{A}$ ist ein **Modell** von spec, falls für alle $s = t \Leftarrow u = v$ in E:
  $\mathcal{A}$ erfüllt $s = t \Leftarrow u = v$.
- Mod(spec)$=\{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ ist Modell von spec$\}$.

Beispiel: Division

Sei

$$S = \{\mathsf{NAT}, \mathsf{BOOL}\}, F = \{\mathsf{true}, \mathsf{false}, 0, s, -, \mathsf{div}, \mathsf{pos}\}$$

E: $\mathsf{pos}(0) = \mathsf{false}$
$\mathsf{pos}(s(x)) = \mathsf{true}$
$x - 0 = x$
$0 - y = 0$
$s(x) - s(y) = x - y$
$\mathsf{div}(x, y) = 0 \Leftarrow \mathsf{pos}(y - x) = \mathsf{true}$
$\mathsf{div}(x, y) = s(\mathsf{div}(x - y, y)) \Leftarrow \mathsf{pos}(y - x) = \mathsf{false}$

$$\mathcal{A} = ((\mathbb{N}, \mathbb{B}), 0^{\mathcal{A}}, s^{\mathcal{A}}, \dot{-}^{\mathcal{A}}, \mathsf{div}^{\mathcal{A}}, \mathsf{pos}^{\mathcal{A}}, \mathsf{true}^{\mathcal{A}}, \mathsf{false}^{\mathcal{A}})$$

$0^{\mathcal{A}} = 0$	$s^{\mathcal{A}}$=Nachfolgefunktion
$\dot{-}^{\mathcal{A}}$=Substraktion	$\mathsf{div}^{\mathcal{A}}$=Division
$\mathsf{pos}^{\mathcal{A}} = > 0$-Prädikat	
$\mathsf{true}^{\mathcal{A}} = \underline{\mathbf{true}}$	
$\mathsf{false}^{\mathcal{A}} = \underline{\mathbf{false}}$	

Dann gilt $\mathcal{A} \in \mathsf{Mod}(\mathsf{spec})$

Beispiel: Fibonacci

Sei

$$S = \{\mathsf{NAT}, \mathsf{NAT}^2\}$$

F: $0 : \quad \to \mathsf{NAT}$
$+ : \quad \mathsf{NAT}, \mathsf{NAT} \to \mathsf{NAT}$
$<>: \quad \mathsf{NAT}, \mathsf{NAT} \to \mathsf{NAT}^2$
$\mathsf{fib} : \quad \mathsf{NAT} \to \mathsf{NAT}^2$

E: $x + 0 = x$
$x + s(y) = s(x + y)$
$\mathsf{fib}(0) = \langle s(0), 0 \rangle$
$\mathsf{fib}(s(x)) = \langle y_2 + y_1, y_2 \rangle \Leftarrow \mathsf{fib}(x) = \langle y_2, y_1 \rangle$

$$\mathcal{A} = ((\mathbb{N}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}), 0^{\mathcal{A}}, +^{\mathcal{A}}, \mathsf{fib}^{\mathcal{A}}, <>^{\mathcal{A}})$$

$0^{\mathcal{A}} = 0$	$+^{\mathcal{A}}$ = Addition
$<>^{\mathcal{A}}$=Paarbildung	$\mathsf{fib}^{\mathcal{A}}$=Fibonacci-Funktion

$\mathsf{fib}^{\mathcal{A}}(0) = (1, 0)$
$\mathsf{fib}^{\mathcal{A}}(x + 1) = (\mathsf{Fib}(x + 1), \mathsf{Fib}(x))$
mit $\mathsf{Fib}(x) = x$-te Fibonacci-Zahl.

Dann gilt

$$\mathcal{A} \in \mathsf{Mod}(\mathsf{spec})$$

Operationale Semantik

Problem bei der Definition von $=_E$

Ansatz: Definiere $\vdash\!\!\dashv_E$, dann $=_E \; = \; \overset{*}{\vdash\!\!\dashv}_E$.

Aber Test, ob $s = t \Leftarrow u = v$ auf Term t_1 anwendbar ist mit σ, erfordert schon $=_E$-Tests $\sigma(u_i) =_E \sigma(v_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

$\Rightarrow$ rekursive Definition von $=_E$.

Lösung Rekursions-frei

1. Ansatz: Inferenzsystem für $=_E$.

2. Ansatz: Approximation von $=_E$ nach der Rekursionstiefe.

Inferenzsystem für $=_E$

Definition 5.3

Sei spec $=$ (sig, E) gegeben.

Das Inferenzsystem $I(E)$ besteht aus den Regeln

(1) $\dfrac{}{t = t}$ Identität

(2) $\dfrac{s = t}{t = s}$ Symmetrie

(3) $\dfrac{t_1 = t_2 \quad t_2 = t_3}{t_1 = t_3}$ Transitivität

(4) $\dfrac{t_1 = s_1, \ldots, t_n = s_n}{f(t_1, \ldots, t_n) = f(s_1, \ldots, s_n)}$ Kongruenz

(5) $\dfrac{\sigma(u) = \sigma(v)}{\sigma(s) = \sigma(t)}$ Gleichungs-Anwendung

falls $s = t \Leftarrow u = v$ in E

Definition 5.4

$E \vdash s = t \text{ gdw } s = t$ in $I(E)$ herleitbar.

$I(E)$-Herleitung am Beispiel

Sei

spec $=$ (sig, E) die Fibonacci-Spezifikation.

Es gilt

$$E \vdash s^i(0) + s^j(0) = s^{i+j}(0)$$

$$E \vdash \mathsf{fib}(0) = \langle s(0), 0\rangle$$

$$E \vdash \mathsf{fib}(s(0)) = \langle s(0), s(0)\rangle$$

$$E \vdash \mathsf{fib}(s^2(0)) = \langle s^2(0), s(0)\rangle$$

$$E \vdash \mathsf{fib}(s^3(0)) = \langle s^3(0), s^2(0)\rangle$$

$$\ldots$$

$$E \vdash \mathsf{fib}(s^n(0)) = \langle s^{\mathsf{Fib}(n)}(0), s^{\mathsf{Fib}(n-1)}(0)\rangle$$

Approximation von $=_E$

Idee

- unbedingtes Gleichungssystem E_i definieren.
- E_i approximiert E bis zur Rekursionstiefe i.

Sei spec $=$ (sig, E)

Definition 5.5 der E_i und von $=_E$

- $E_0 = \emptyset$.
- $E_{i+1} = \{\sigma(s) = \sigma(t) \mid s = t \Leftarrow u = v \text{ in } E,\ \sigma(u) =_{E_i} \sigma(v)\}$
- $=_i \;=\; =_{E_i}$
- $s =_E t \text{ gdw } \exists i : s =_i t$

Beachte

a) Es gilt $E_i \subseteq E_{i+1}$. (Induktion nach i)

b) Die E_i sind **unbedingte** Gleichungssysteme, also sind die $=_i$ wohl-definiert (wie früher). Damit ist auch $=_E$ wohl-definiert.

Satz 5.1.

Es gilt stets

$$E \vdash s = t \text{ gdw } s =_E t$$

Beweis: Übung.

Approximation von $=_E$ am Beispiel

Sei

spec $=$ (sig, E) die Fibonacci-Spezifikation.

Es gilt

$$s^i(0) + s^j(0) =_1 s^{i+j}(0)$$

$$\mathsf{fib}(0) =_1 \langle s(0), 0\rangle$$

$$\mathsf{fib}(s(0)) =_2 \langle s(0), s(0)\rangle$$

$$\mathsf{fib}(s^2(0)) =_3 \langle s^2(0), s(0)\rangle$$

$$\mathsf{fib}(s^3(0)) =_4 \langle s^3(0), s^2(0)\rangle$$

$$\ldots$$

Konstruktion von Modellen

Frage: Hat jede Spezifikation spec ein Modell? JA!

Definition 5.6

E-Quotient zu Term(F, V')

Sei spec $=$ (sig, E) sig $= (S, F, \tau)$.

$$[t] = \{t' \mid t =_E t'\} \qquad t \in \mathsf{Term}(F, V')$$
$$T_s = \{[t] \mid t \in \mathsf{Term}_s(F, V')\} \qquad s \in S$$

$$\mathcal{I}_{\mathsf{spec}}(V') = ((T_s)_{s\in S}, (\hat{f})_{f\in F})$$

$$\hat{f}([t_1], \ldots, [t_n]) = [f(t_1, \ldots, t_n)]$$

$$\mathcal{I}_{\mathsf{spec}} = \mathcal{I}_{\mathsf{spec}}(\varnothing)$$

Lemma 5.1

$\mathcal{I}_{\mathsf{spec}}(V')$ ist ein Modell von spec.

Beweis: Wie für unbedingte Spezifikationen.

Definition 5.7

$\mathcal{I}_{\mathsf{spec}}$ heißt das **initiale Modell** zu spec.

Der Satz vom Birkhoff

Sei

spec $= (\text{sig}, E)$, $\mathcal{A}$ eine sig-Algebra.

Definition 5.8

$\mathcal{A} \models s = t$ gdw $\mathcal{A}$ erfüllt $s = t$ ($s = t$ gilt in $\mathcal{A}$)

$E \models s = t$ gdw für alle $\mathcal{A} \in \text{Mod(spec)}$ $\mathcal{A} \models s = t$

Satz 5.2. (Birkhoff)

Für jedes spec $= (\text{sig}, E)$ gilt

$$E \models s = t \text{ gdw } s =_E t$$

Beweis-Idee zum Satz von Birkhoff

a) $E \models s = t$ impliziert $s =_E t$:
Sei $V' = \text{Var}(s, t)$ $\mathcal{A} = \mathcal{I}_{\text{spec}}(V')$
Dann $\mathcal{A} \in \text{Mod(spec)}$ also $\mathcal{A} \models s = t$
also $[s] = [t]$ also $s =_E t$

b) $s =_E t$ impliziert $E \models s = t$:
Sei $s =_E t$, $\mathcal{A} \in \text{Mod(spec)}$, zu zeigen ist $\mathcal{A} \models s = t$.

1) Eine Induktion nach k liefert wie früher

Aus $u = v \in E_k$ folgt $\mathcal{A} \models u = v$

2) Aus $s =_E t$ folgt $\mathcal{A} \models s = t$:
Sei $s =_E t$, also $s =_{E_k} t$ für ein k.
Dann gilt $\mathcal{A} \models s = t$ nach 1)