3.5 Konfluenz und Termination

3.5.1 Konfluenz

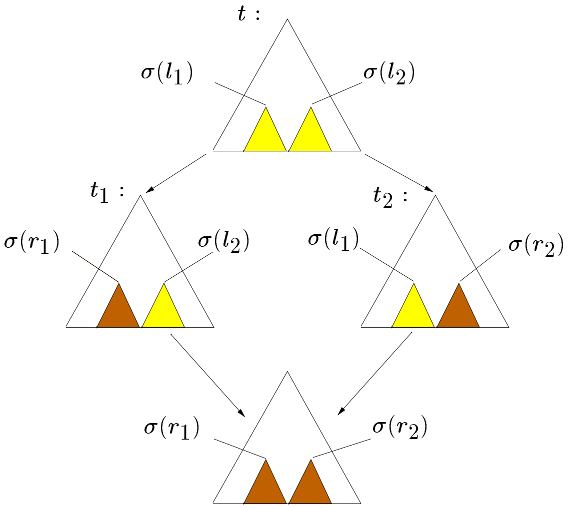
Zunächst: lokale Konfluenz

Divergenz-Analyse

Sei $t \to t_1$ mit $l_1 \to r_1,\ \sigma_1,\ p_1 \in O(t)$
$t \to t_2$ mit $l_2 \to r_2,\ \sigma_2,\ p_2 \in O(t)$

o.B.d.A. Die Regeln sind Variablen-disjunkt,
$\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$

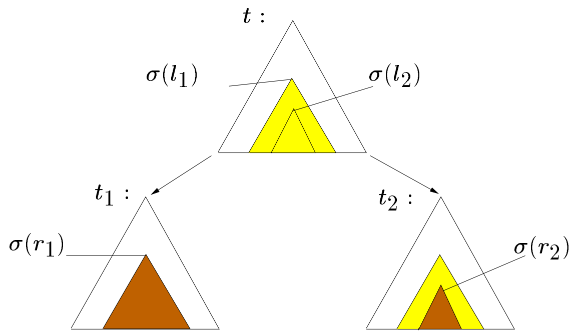
1) Nicht-Überlappung



Also: $t_1 \to \circ \leftarrow t_2$. Der Fall ist unkritisch.

Divergenz-Analyse (Forts.)

2) Überlappung



Es gilt $\sigma(l_1) \geq_{TT} \sigma(l_2)$.

Es gibt $p \in O(\sigma(l_1))$ mit $\sigma(l_1)/p \equiv \sigma(l_2)$.

a) $p \in O(l_1) \wedge l_1/p \notin V$
echte Überlappung
Es gilt i. Allg. nicht $t_1 \downarrow t_2$.

b) $p \notin O(l_1)$ oder $p \in O(l_1), l_1/p \in V$
Variablen-Überlappung
Wir zeigen: Es gilt $t_1 \downarrow t_2$.

Überlappungen: Beispiele

$f(f(x',y'),z') \to f(x',f(y',z'))$
$f(x,g(x)) \to 1$

a)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \overbrace{f(\underbrace{f(x,g(x))}, z)} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
f(x,f(g(x),z)) & & f(1,z)
\end{tikzcd}$$

$\sigma(l_1/1) \equiv \sigma(l_2)$
$p = 1 \in O(l_1)$ $\qquad\qquad$ $\rightsquigarrow$ **echte Überlappung**

b)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \overbrace{f(f(x,y), \underbrace{f(z,g(z))})} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
f(x,f(y,f(z,g(z)))) & & f(f(x,y),1)
\end{tikzcd}$$

$\sigma(l_1/2) \equiv \sigma(l_2)$
$p = 2 \in O(l_1)$, $l_1/p \equiv z' \in V$
$\rightsquigarrow$ **Variablen-Überlappung**

Unkritische Überlappungen

Lemma 3.10

Sei $t_1 \longleftarrow t \longrightarrow t_2$ eine Nicht-Überlappung.
Dann gilt $t_1 \longrightarrow \circ \longleftarrow t_2$.

Lemma 3.11

Sei $t_1 \longleftarrow t \longrightarrow t_2$ eine Variablen-Überlappung:

$t \longrightarrow t_1$ mit $l_1 \to r_1, \sigma$
$t \longrightarrow t_2$ mit $l_2 \to r_2, \sigma$
$\sigma(x) \geq_{TT} \sigma(l_2)$ mit $x \in \mathsf{Var}(l_1)$

Sei $|l_1|_x = i$ und $|r_1|_x = j$. Dann gilt $t_1 \xrightarrow{j} \circ \xleftarrow{i} t_2$. Ist also $l_1 \to r_1$ linear, so gilt $t_1 \xrightarrow{\leq 1} \circ \longleftarrow t_2$.

Beispiel

$f(x,x) \to g(x,x,x), \quad l_2 \to r_2, \quad i = 2, j = 3.$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& f(l_2,l_2) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
g(l_2,l_2,l_2) \arrow[ddr, "j"] & & f(l_2,r_2) \arrow[d, "i-1"] \\
& & f(r_2,r_2) \arrow[dl] \\
& g(r_2,r_2,r_2) &
\end{tikzcd}$$

Echte Überlappungen

Definition 3.18

Seien $l_1 \to r_1$, $l_2 \to r_2$ Variablen-disjunkte Regeln,
$p \in O(l_1)$ mit $l_1/p \notin V$,
$\sigma = \text{mgu}(l_1/p, l_2)$.

Dann heißt

$$\begin{tikzcd}
& t \equiv \sigma(l_1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
t_1 \equiv \sigma(r_1) & & \sigma(l_1[p \leftarrow r_2]) \equiv t_2
\end{tikzcd}$$

ein **kritisches Tripel** (critical peak) und $\langle t_1, t_2 \rangle$ ein **kritisches Paar**. Sei $CP(R)$ die Menge der kritischen Paare zu R.

Ist $p = \lambda$ und $l_2 \to r_2$ eine Variablen-Permutation von $l_1 \to r_1$, so gilt $t_1 \equiv t_2$ und $\langle t_1, t_2 \rangle \notin CP(R)$.

Kritische Paare: Beispiele

Beispiel

$R: 0 + x' \to x' \qquad (x + y) + z \to x + (y + z)$
$\quad x'' + 0 \to 0$

a) $0 + x'$ und $(x + y)$ sind unifizierbar.

$$\begin{tikzcd}
& (0 + x') + z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
0 + (x' + z) & & x' + z
\end{tikzcd}$$

Es gilt
$x' + z \downarrow 0 + (x' + z)$

b1) $x'' + 0$ und $x + y$ sind unifizierbar.

$$\begin{tikzcd}
& (x + 0) + z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x + (0 + z) & & 0 + z
\end{tikzcd}$$

Es gilt **nicht**
$x + (0 + z) \downarrow 0 + z$

b2) $x'' + 0$ und $(x + y) + z$ sind unifizierbar.
Es gilt $0 \leftarrow (x + y) + 0 \to x + (y + 0)$ und $0 \downarrow x + (y + 0)$.

Kritische Paare: Beispiele (Forts.)

c) Überlappung der rechten Regel mit sich selbst:
$(x' + y') + z' \to x' + (y' + z')$
$x' + y'$ und $(x + y) + z$ unifizierbar.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \overbrace{(\underbrace{(x+y)+z}) + z'} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\underbrace{(x+y)+(z+z')} \arrow[dr, "*"] & & (\underbrace{x+(y+z)})+z' \arrow[dl, "*"'] \\
 & x+(y+(z+z')) &
\end{tikzcd}$$

d) Überlappung der beiden linken Regeln:
$0 + x'$ und $x'' + 0$ sind unifizierbar.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 0+0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
0 & & 0
\end{tikzcd}$$

Es gilt $0{\downarrow}0$

$\leadsto$ $s \downarrow t$ für alle $(s, t) \in CP(R)$, außer b1).

Ergebnisse

Lemma 3.12 (Kritisches-Paar-Lemma)

a) Aus $t_1 \longleftarrow t \longrightarrow t_2$ folgt
$t_1 \downarrow t_2$ oder $t_1 \longleftrightarrow_{CP(R)} t_2$.

b) Gilt $s \downarrow t$ für alle $(s, t) \in CP(R)$, so ist R lokal konfluent.

Satz 3.7.

a) R ist lokal konfluent
$\text{gdw } s \downarrow t$ für alle $(s, t) \in CP(R)$.

b) Sei R terminierend.
R ist konfluent
$\text{gdw } s \downarrow t$ für alle $(s, t) \in CP(R)$.

c) Sei R linear (evtl. nicht terminierend).
Gilt $s \xrightarrow{\leq 1} \circ \xleftarrow{\leq 1} t$ für alle $(s, t) \in CP(R)$, so ist R konfluent.

Beweis zum Kritischen-Paar-Lemma

Sei

$t \longrightarrow t_1$ mit $l_1 \to r_1, p, \sigma$

$t \longrightarrow t_2$ mit $l_2 \to r_2, q, \sigma$

o.B.d.A. Regeln Variablen-disjunkt und $q = \lambda$.

1. Nicht-Überlappung

$$t_1 \longrightarrow \circ \longleftarrow t_2 \quad \text{(Lemma 3.10)}$$

2. Variablen-Überlappung

$$t_1 \xrightarrow{*} \circ \xleftarrow{*} t_2 \quad \text{(Lemma 3.11)}$$

3. Echte Überlappung

$$p \in O(l_2) \qquad \sigma(l_1) \equiv \sigma(l_2/p)$$

$\leadsto$ $\tau =$ mgu$(l_1, l_2/p)$ existiert
$\sigma = \sigma' \circ \tau \qquad \sigma'$ existiert

$\leadsto$ $\langle t_1, t_2 \rangle$ ist Instanz (mit σ') des kritischen Paares zu (l_1, l_2, p)

$\leadsto$ $t_1 \longleftrightarrow_{CP(R)} t_2$

Konfluenz: Beispiele

1) $R : 0 + x \to x \qquad (x+y)+z \to x+(y+z)$

$\leadsto$ R ist terminierend (o. Beweis).
$s \downarrow t$ für alle $(s,t) \in CP(R)$

$\leadsto$ R ist konfluent.

2) $R : x + 0 \to x \qquad (x+y)+z \to x+(y+z)$

$\leadsto$ R ist terminierend (o. Beweis).
Es gibt $(s,t) \in CP(R)$ mit $s \not\downarrow t$.

$\leadsto$ R ist nicht lokal konfluent, nicht konfluent:

$$\begin{tikzcd} & (x+0)+y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ x+y & & x+(0+y) \end{tikzcd}$$

2') $R' : x + 0 \to x \qquad (x+y)+z \to x+(y+z)$
$x + (0+y) \to x + y$

$\leadsto$ R' ist terminierend (o. Beweis).
$(s,t) \in CP(R') \leadsto s \downarrow t$ (Übung!)

$\leadsto$ R' ist konfluent.
$=_R \; = \; =_{R'}$

Test auf Konfluenz

Satz 3.8.

Das folgende Problem ist entscheidbar.

Eingabe: R terminierend, endlich.
Frage: Ist R konfluent?

Algorithmus

$CP(R) = \{(s_i, t_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ ist endlich.

1. Berechne $CP(R)$.
2. Berechne Normalformen $\hat{s}_i, \hat{t}_i$ zu s_i, t_i.
3. Ausgabe
   JA, falls $\hat{s}_i \equiv \hat{t}_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
   NEIN, falls $\hat{s}_i \not\equiv \hat{t}_i$ für ein i.

Beachte

JA ist korrekt, da R lokal konfluent, also R konfluent ist.

NEIN ist korrekt wegen

$$\hat{s}_i \xleftarrow{*} s_i \longleftarrow u \longrightarrow t_i \xrightarrow{*} \hat{t}_i, \text{ nicht } \hat{s}_i \downarrow \hat{t}_i$$

$\hat{s}_i, \hat{t}_i$ sind berechenbar, da R endlich und terminierend ist.
$CP(R)$ ist berechenbar.

Konfluenz ohne Termination: Beispiele (1)

1. $R: f(x,x) \to a$
   $\quad f(x, s(x)) \to b$
   $\quad a \to s(a)$
   $\rightsquigarrow$ a) $CP(R) = \varnothing$ $\rightsquigarrow$ R ist lokal konfluent.
   $\rightsquigarrow$ b) R ist nicht konfluent:

$$\begin{tikzcd}
 & f(a,a) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a & & f(a, s(a)) \arrow[d] \\
 & & b
\end{tikzcd}$$

nicht $a \downarrow b$

Beachte

R ist nicht terminierend und nicht linear.

2. $R: f(x) \to f(s(x))$
   $\quad f(x) \to 0$
   $\rightsquigarrow$ R ist nicht terminierend, aber linear.

$$CP(R) = \{(0, f(s(x)))\} \qquad 0 \xrightarrow{\leq 1} 0 \longleftarrow f(s(x))$$

$\rightsquigarrow$ R ist konfluent.