E-Gleichheiten: Vergleich

Fakt (Birkhoff)

$$E \vdash s = t \ \text{ gdw } \ E \models s = t$$

Also Operationale und denotationale E-Gleichheit stimmen stets überein.

Hier Betrachtung der operationalen E-Gleichheit.
Behandlung mit Rewrite-Techniken
$E \quad \rightsquigarrow \quad R$ mit $s =_E t \ \text{ gdw } \ s \downarrow_R t$
Rewrite-Semantik

Fakt

$s = t \in ITh(\text{spec})$, falls $E \models s = t$

- Im initialen Modell gelten mehr Theoreme als in allen Modellen.
- Für Beweise zu $E \models s = t$ reicht Gleichheitsschließen.
- Für Beweise zu $s = t \in ITh(\text{spec})$ braucht man zusätzlich Induktion.

Denotationale versus initiale Gleichheit (1)

Beispiel

sig $= (\{\text{NAT}\}, \{0, +, s\}, \tau)$
$E : x + 0 = x \qquad x + s(y) = s(x + y)$

In $ITh(\text{spec})$:
$$0 + x = x$$
$$x + y = y + x$$
$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

nicht
$$E \models 0 + x = x$$
$$E \models x + y = y + x$$
$$E \models (x + y) + z = x + (y + z)$$

Es gibt Modelle, in denen dies nicht gilt, z. B.

$$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, \{0, -, \text{id}\})$$

Denotationale versus initiale Gleichheit (2)

Beispiel

sig $= (\{\mathsf{LIST}, \mathsf{NAT}\}, \{\mathsf{nil}, ., \mathsf{app}\}, \tau)$

E : $\mathsf{app}(\mathsf{nil}, q_2) = q_2$
$\mathsf{app}(x.q_1, q_2) = x.\mathsf{app}(q_1, q_2)$

In $ITh(\mathsf{spec})$ gilt:

$\mathsf{app}(q, \mathsf{nil}) = q$
$\mathsf{app}(q_1, \mathsf{app}(q_2, q_3)) = \mathsf{app}(\mathsf{app}(q_1, q_2), q_3)$

Es gilt nicht

$E \models \mathsf{app}(q, \mathsf{nil}) = q$
$E \models \mathsf{app}(q_1, \mathsf{app}(q_2, q_3)) = \mathsf{app}(\mathsf{app}(q_1, q_2), q_3)$

R: $\mathsf{app}(\mathsf{nil}, q_2) \to q_2$
$\mathsf{app}(x.q_1, q_2) \to x.\mathsf{app}(q_1, q_2)$
ist konvergent.

Es gilt $=_E \; = \; \overset{*}{\longleftrightarrow}_R$. Es gilt **nicht** $\mathsf{app}(q, \mathsf{nil}) \downarrow_R q$.

(also **nicht** $\mathsf{app}(q, \mathsf{nil}) =_E q$, **nicht** $E \models \mathsf{app}(q, \mathsf{nil}) = q$)

Operationale versus Rewrite-Semantik

Beispiel

sig $= (\{\mathsf{NAT}\}, \{0, +, s\}, \tau)$

$$E : x + 0 = x \qquad x + s(y) = s(x + y)$$

Richten von E liefert

$$R : x + 0 \to x \qquad x + s(y) \to s(x + y)$$

Es gilt

$$s =_E t \;\text{ gdw }\; s \downarrow_R t$$

Beachte: Dies gilt nicht immer.

Fakt

Ist $\longrightarrow_R$ konfluent, so gilt

$$s =_R t \;\text{ gdw }\; s \downarrow_R t$$

Operationale E-Gleichheit: Theorem-Beweisen

Ab jetzt: $\sim\ =\ =_E$ (operationale E-Gleichheit)

Beispiel Ringe

E:

$$\begin{array}{ll} x + 0 = x & x \cdot 0 = 0 \\ x + (-x) = 0 & x \cdot 1 = x \\ x + y = y + x & (x + y) + z = x + (y + z) \\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) & x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \\ a \cdot a = a & a \cdot b + b = 0 \end{array}$$

Behauptung:

$4 \cdot b =_E 0$, d. h. $(b + b) + (b + b) =_E 0$.

Beweis: (automatisch gefunden)

Lemma 1:	$x + (b + a \cdot b) =_E x$
Lemma 2:	$b + (a \cdot b + z) =_E z$
Lemma 3:	$a \cdot b =_E b$
Theorem	$(b + b) + (b + b) =_E 0$
	$b + b =_E 0$

3.2 Spezifikationen

3.2.1 Syntax und Semantik

Definition 3.1

Signatur

$$\text{sig} = (S, F, \tau)$$

wobei

S	Sorten
F	Operatoren, Funktions-Symbole
τ	$\tau : F \to S^+$ Stelligkeit

sind.

Schreibweise

$$f : s_1 \ldots s_n \to s \quad \text{statt } \tau(f) = s_1 \ldots s_n s$$

Konstante (der Sorte s)

$$f \in F \quad \text{mit } f : \to s$$

Terme über einer Signatur

Definition 3.2

a) **Terme** über (sig, V) sig $= (S, F, \tau)$

$\text{Term}_s(F, V)$ Terme der Sorte s:

i) $f : \to s \quad \rightsquigarrow f \in \text{Term}_s(F, V)$

ii) $x \in V_s \quad \rightsquigarrow x \in \text{Term}_s(F, V)$

iii) $f : s_1 \ldots s_n \to s$

$t_i \in \text{Term}_{s_i}(F, V)$

$\rightsquigarrow f(t_1, \ldots, t_n) \in \text{Term}_s(F, V)$

$\text{Term}(F, V) = \bigcup_{s \in S} \text{Term}_s(F, V)$ Terme über (sig, V).

b) **Grundterme**

$\text{Term}_s(F) = \text{Term}_s(F, \emptyset)$

$\text{Term}(F) = \text{Term}(F, \emptyset)$

c) **Länge** von Termen

$|t| = 1$, falls $t \in V$ oder t Konstante.

$|t| = 1 + \sum |t_i|$, falls $t \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$.

Signatur: Ein Beispiel

Signatur

sig $= (S, F, \tau)$ $S = \{\text{NAT}, \text{LIST}\}$

F:	0:	$\to$ NAT
	s:	NAT $\to$ NAT
	$+$:	NAT, NAT $\to$ NAT
	len:	LIST $\to$ NAT
	nil:	$\to$ LIST
	.:	NAT, LIST $\to$ LIST
	app:	LIST, LIST $\to$ LIST

$V : x, y \in V_{\text{NAT}}$ $q, q_i \in V_{\text{LIST}}$

Terme

$s^i(0) \in \text{Term}_{\text{NAT}}(F)$ Sei $\underline{i} \equiv s^i(0)$

$s^i(0) + s^j(x) \in \text{Term}_{\text{NAT}}(F, V)$

$\text{app}(\underline{4}.\text{nil}, \underline{2}.\underline{9}.\text{nil}) \in \text{Term}_{\text{LIST}}(F)$

$\text{len}(\text{app}(q_1, q_2)) \in \text{Term}_{\text{NAT}}(F, V)$

aber: $0 + \text{nil}, \text{app}(0, x) \notin \text{Term}(F, V)$

Spezifikationen

Gegeben: $\text{sig} = (S, F, \tau)$

$$V = \bigcup_{s \in S} V_s$$

Gleichung

$u = v \qquad u, v \in \text{Term}_s(F, V)$

Gleichungssystem

$$E = \{u_i = v_i \mid i \in I\}$$

Spezifikation

$$\text{spec} = (\text{sig}, E)$$

Beispiel

sig, V wie früher.

E: $x + 0 = x$ $\qquad$ $\text{app}(\text{nil}, q_2) = q_2$

$x + s(y) = s(x + y)$ $\qquad$ $\text{app}(x.q_1, q_2) = x.\text{app}(q_1, q_2)$

$\text{len}(\text{nil}) = 0$ $\qquad$ $\text{len}(x.q) = s(\text{len}(q))$

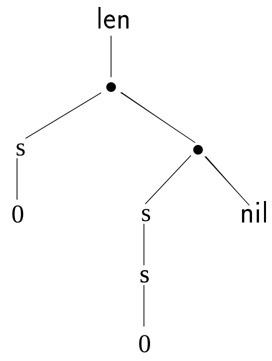
Gilt $\text{len}(\text{app}(q_1, q_2)) =_E \text{len}(q_1) + \text{len}(q_2)$?

Darstellung von (Teil-)Termen

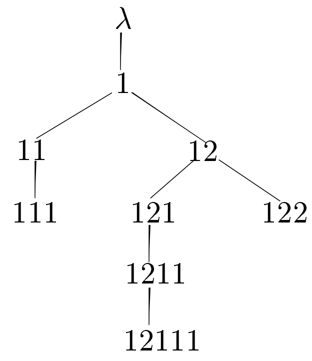
Beispiel

$$t \equiv \text{len}(s(0).s(s(0)).\text{nil})$$

Baumdarstellung



Stellen



Stellen/Teilterme von Termen

Definition 3.3

Sei $t \in \text{Term}(F, V)$ ein Term.

a) Stellen (Positionen) in t

$O(t) = \{\lambda\}$ falls $|t| = 1$

$O(t) = \{\lambda\} \cup \{ip \mid p \in O(t_i)\}$ falls $|t| > 1$, $t \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$

also $O(t) \subseteq \mathbb{N}^*$, $p \in O(t)$ **Stelle** in t.

b) Teilterme von t

$t/\lambda \equiv t$

$t/ip \equiv t_i/p$ falls $t \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$

t/p **Teilterm** von t bei $p \in O(t)$

Modelle von spec (1)

Gegeben: sig $= (S, F, \tau)$ $\quad V = \bigcup_{s \in S} V_s$

spec $=$ (sig, E)

Definition 3.4

a) Eine **sig-Algebra** $\mathcal{A} = (A, \mathcal{F})$ besteht aus

- $(A_s)_{s \in S}$ System von Trägermengen, $\quad A = \bigcup_{s \in S} A_s$
- $\mathcal{F} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in F\}$ Funktionen

$f^{\mathcal{A}} : A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n} \to A_s \quad$ für $f : s_1 \ldots s_n \to s$

b) Eine **Evaluierungsfunktion** ist

$\varphi : V_s \to A_s$ für alle $s \in S$

$\varphi(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{A}}(\varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_n))$

Bemerkung

Eine sig-Algebra $\mathcal{A}$ ist eine Algebra, die zu sig „passt".

$(\mathcal{A}, \varphi)$**:**

Die A_s interpretieren die Sorten s.

Die $f^{\mathcal{A}}$ interpretieren die Funktionssymbole f.

$\varphi(x)$ Interpretation der Variablen x.

$\varphi(t)$ Interpretation des Terms t.

Modelle von spec (2)

Gegeben: spec $=$ (sig, E)
$\mathcal{A}$ sig-Algebra

Definition 3.5

a) $(\mathcal{A}, \varphi)$ **erfüllt** $s = t$ gdw

$$\varphi(s) = \varphi(t) \qquad \text{in } \mathcal{A}$$

b) $s = t$ **gilt in** $\mathcal{A}$ gdw

$$(\mathcal{A}, \varphi) \text{ erfüllt } s = t \qquad \text{für alle } \varphi$$

c) $\mathcal{A}$ ist **Modell von spec**

$$u = v \text{ gilt in } \mathcal{A} \qquad \text{für alle } u = v \text{ in } E$$

Mod(spec) ist die Klasse aller Modelle von spec.

Semantische E-Gleichheit

$E \models s = t$ gdw
$s = t$ gilt in allen Modellen $\mathcal{A}$ von spec.

Modelle: Beispiel (1)

Sei

sig $= (S, F, \tau)$ die Signatur mit

$S = \{$elem, elem$^*\}$, $F = \{\wedge, \vee, 0, 1, \text{nil}, ., \text{app}\}$

F, τ:	$\wedge, \vee$:	elem, elem $\to$ elem
	$0, 1$:	$\to$ elem
	nil:	$\to$ elem*
	. :	elem, elem* $\to$ elem*
	app:	elem*, elem* $\to$ elem*

sig-Algebren sind

$$\mathcal{A} = (\mathbb{B}, \mathbb{B}^*;\ \textbf{and}, \textbf{or}, \textbf{false}, \textbf{true}, \lambda, ., \circ)$$

$$\mathcal{A}_1 = (\mathbb{N}, \mathbb{N};\ \cdot, +, 0, 1, 0, +, +)$$

$$\mathcal{A}_2 = (\mathbb{N}, \mathbb{N}^*;\ \cdot, +, 0, 1, \lambda, ., \circ)$$

$$\mathcal{A}_3 = (\mathbb{N}, \mathbb{N};\ +, +, 0, 1, 0, +, +)$$

Schreibweise hier von Folgen

λ ist die leere Folge
$a_1.a_2.\cdots.a_n.\lambda$ ist die Folge, die aus $a_1, a_2, \ldots, a_n$ besteht.

Modelle: Beispiel (2)

Sei sig, $\mathcal{A}, \mathcal{A}_i$ wie oben.

$$t \equiv \mathsf{app}(x.\mathsf{nil}, 1.(0 \vee x).\mathsf{nil})$$

a) Auswertung von t in $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \textbf{true} \\
\rightsquigarrow \varphi(t) &= (\textbf{true}.\lambda) \circ (\textbf{true}.(\textbf{false or true}).\lambda) \\
&= (\textbf{true}.\lambda) \circ (\textbf{true}.\textbf{true}.\lambda) \\
&= \textbf{true}.\textbf{true}.\textbf{true}.\lambda
\end{aligned}$$

b) Auswertung von t in $\mathcal{A}_i$.

$$\varphi(x) = 5$$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \quad \varphi(t) &= (5+0) + (1 + (0+5) + 0) \\
&= 5 + 6 = 11 && \text{in } \mathcal{A}_1
\end{aligned}$$

$$\varphi(t) = (5.\lambda) \circ (1.5.\lambda) = 5.1.5.\lambda \qquad \text{in } \mathcal{A}_2$$

$$\varphi(t) = 5 + 6 = 11 \qquad \text{in } \mathcal{A}_3$$

Also t wird in verschiedenen Algebren sehr unterschiedlich ausgewertet.

Modelle: Beispiel (3)

Sei sig, $\mathcal{A}, \mathcal{A}_i$ wie oben.

spec $= (\mathsf{sig}, E)$

$$\begin{aligned}
E: \quad x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\
x \wedge y &= y \wedge x \\
x \vee y &= y \vee x \\
\mathsf{app}(z, \mathsf{app}(x, y)) &= \mathsf{app}(\mathsf{app}(z, x), y)
\end{aligned}$$

$\mathcal{A}$ **ist** ein Modell von spec.
$\mathcal{A}_1$ **ist** ein Modell von spec.
$\mathcal{A}_2$ **ist** ein Modell von spec.
$\mathcal{A}_3$ **ist kein** ein Modell von spec,
da die 1. Gleichung nicht gilt:

$$x + (y + z) \neq (x + y) + (x + z)$$