Inferenzsysteme - Algorithmen

Idee

Trennung von Logik und Kontrolle.

$\mathcal{B}$ beschreibt viele Algorithmen $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A}$ ist automatisch korrekt, falls

- $\mathcal{A}$ nur erlaubte Inferenzschritte macht.
- $\mathcal{A}$ die minimale Kontrollvorschrift einhält.

$\Rightarrow$ Dies erlaubt viel Freiheit bei der Implementierung (Optimierung).

Inferenzsystem $\mathcal{B}$: Invarianten

Invarianten, die gelten sollen:

Sei $>$ feste Noethersche Ordnung.

a) $\sim \, = (\longleftrightarrow_i \cup \longmapsto\!\!\dashv_i)^*$
Die Inferenzregeln sind korrekt und vollständig.

b) $\longrightarrow_i \subseteq >$
Alle $\longrightarrow_i$ sind terminierend.

Ideen zum Inferenzsystem $\mathcal{B}$

a) $\vdash\!\dashv_i$ muss leer werden.

b) $\longrightarrow_i$ konfluent gdw $\longrightarrow_i$ lokal konfluent.
$\leadsto$ Stopp, falls $\vdash\!\dashv_i = \emptyset$, $\longrightarrow_i$ lokal konfluent,
sonst: „**Reparatur**“.

1) $u \vdash\!\dashv_i v \;\leadsto\; u \longrightarrow_{i+1} v$,	falls $u > v$.
2) $u \vdash\!\dashv_{i+1} v$,	falls $u \; {}_i\!\longleftarrow \; w \longrightarrow_i v$.
3) $u \vdash\!\dashv_i v \;\leadsto\; u \vdash\!\dashv_{i+1} w$,	falls $v \longrightarrow_i w$.

Bedeutung der Inferenzregeln

1) richten,
2) deduzieren,
3) simplifizieren.

Schreibweise

$u \;\dot{\vdash\!\dashv}\; v$ steht für $u \vdash\!\dashv v$ oder $v \vdash\!\dashv u$.

Inferenzsystem $\mathcal{B} = \mathcal{B}_>$

Sei $>$ feste Noethersche Partialordnung.

Orientieren

$$\frac{(\vdash\!\dashv \cup \{u \;\dot{\vdash\!\dashv}\; v\};\ \longrightarrow)}{(\vdash\!\dashv;\ \longrightarrow \cup \{u \longrightarrow v\})}$$

falls $u > v$

Deduzieren

$$\frac{(\vdash\!\dashv;\ \longrightarrow)}{(\vdash\!\dashv \cup \{u \vdash\!\dashv v\};\ \longrightarrow)}$$

falls

$$\begin{tikzcd} & \circ \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ u & & v \end{tikzcd}$$

Simplifizieren

$$\frac{(\vdash\!\dashv \cup \{u \;\dot{\vdash\!\dashv}\; v\};\ \longrightarrow)}{(\vdash\!\dashv \cup \{u \vdash\!\dashv w\};\ \longrightarrow)}$$

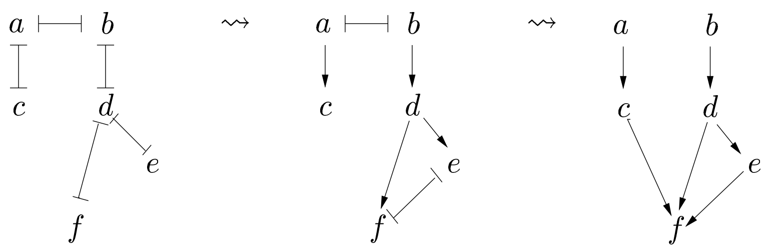
falls $v \longrightarrow w$

Löschen

$$\frac{(\vdash\!\dashv \cup \{u \vdash\!\dashv u\};\ \longrightarrow)}{(\vdash\!\dashv;\ \longrightarrow)}$$

Inferenzsystem $\mathcal{B}$: Beispiel

Sei $\mathcal{E} = \{a, b, c, d, e, f\}$ $\quad \longrightarrow = \emptyset$, $\vdash\!\!\!\dashv$ wie im Bild.



Beachte

Die Inferenzregeln sind korrekt und vollständig.

Die Invarianten (a), (b) gelten.

Unverzichtbare Kontrolle: Fairness

Jede Inferenz, die möglich ist, muss auch gezogen werden.

Also: Stopp nach endlicher Zeit $\leadsto$ Fairness gegeben.
Unendliche Rechnung $\leadsto$ Fairness muss garantiert werden.

Beachte

$\mathcal{E}$, $\vdash\!\!\!\dashv$ sind i. Allg. unendlich.

Korrektheit von $\mathcal{B}$

Logisch korrekt:

Die Antwort ist richtig:

$\sim \; = \; \stackrel{*}{\longleftrightarrow}$ und $\longrightarrow$ ist konvergent.

Logisch vollständig:

Die Antwort wird auch erzeugt, evtl. nach unendlicher Rechnung.

Beachte

Unser Problem (das Wortproblem zu $(\mathcal{E}, \sim)$) ist i. Allg. nicht rekursiv, nur rekursiv aufzählbar (später, bei geeigneter Instantiierung).

Das Verfahren kann also nicht immer nach endlicher Zeit erfolgreich halten.

Beweismethode für die Korrektheit

Beweisverkleinerung:

Zu jedem Beweis B für $u \sim v$ in $(\vdash\!\!\!\dashv_i, \longrightarrow_i)$ gibt es Beweis B' für $u \sim v$ in $(\vdash\!\!\!\dashv_{i+1}, \longrightarrow_{i+1})$ mit $B \geq_{\mathcal{B}} B'$, bis schließlich $u \downarrow v$.

Beweise

Definition 2.12

Ein **Beweis** für $u \sim v$ in $(\vdash\!\!\dashv, \longrightarrow)$ ist
$B = (u_0, b_1, u_1, \ldots, b_n, u_n)$ mit

- $u = u_0 \qquad v = u_n$
- $b_i \in \{\vdash\!\!\dashv, \longrightarrow, \longleftarrow\} \qquad i = 1, \ldots, n$
- $u_{i-1} b_i u_i$ gilt in $(\vdash\!\!\dashv, \longrightarrow) \qquad i = 1, \ldots, n$

Beispiel

$u_0 \longrightarrow u_1 \vdash\!\!\dashv u_2 \longleftarrow u_3 \longrightarrow u_4 \vdash\!\!\dashv u_5$

Definition 2.13

Ein **V-Beweis** hat die Form $u \downarrow v$, also
$u \longrightarrow \cdots \longrightarrow \circ \longleftarrow \cdots \longleftarrow v$.

Beweisordnungen

Definition 2.14

Eine Ordnung $\geq$ auf Beweisen heißt eine **Beweisordnung**, falls gilt: $\geq$ ist

- Noethersche Partialordnung auf Beweisen,
- verträglich mit der Beweisstruktur:

  Ist B Beweis zu $u \sim v$
  B_1 Beweis zu $t \sim u$
  B_2 Beweis zu $v \sim w$
  B' Beweis zu $u \sim v$
  $B \geq B'$,

  so ist $B_1 B B_2 \geq B_1 B' B_2$

Also

Ersetzt man im Beweis $B_1 B B_2$ zu $t \sim w$ den Teilbeweis B zu $u \sim v$ durch den kleineren Beweis B' zu $u \sim v$, so verkleinert sich $B_1 B B_2$ zu $B_1 B' B_2$.

Beweisordnung $\geq_{\mathcal{B}}$

Sei $>$ die feste Ordnung auf $\mathcal{E}$ und $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{>}$.

Definition 2.15

Sei

$B = (u_0, b_1, u_1, \ldots, b_n, u_n)$ Beweis,

$c_i = c(u_{i-1}, b_i, u_i)$ die Komplexität von $u_{i-1} b_i u_i$:

$$c_i = \begin{cases} \{u_{i-1}\} & \text{falls } u_{i-1} \longrightarrow u_i \\ \{u_i\} & \text{falls } u_{i-1} \longleftarrow u_i \\ \{u_{i-1}, u_i\} & \text{falls } u_{i-1} \longmapsto\!\!\!\!\dashv\; u_i \end{cases}$$

$c(B) = \{c_1, \ldots, c_n\}$ die Komplexität von B.

Dann setze

$B \geq_{\mathcal{B}} B' \text{ gdw } c(B) \gg_0 c(B')$ oder $B = B'$,

wobei $\gg_0$ die doppelte Multimengenerweiterung von $>$ ist.

Beachte

$c_i \in \mathsf{Mult}(\mathcal{E})$,

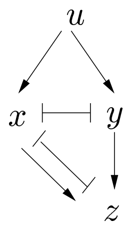
$c(B) \in \mathsf{Mult}(\mathsf{Mult}(\mathcal{E}))$.

Also ist $\geq_{\mathcal{B}}$ wohl-definiert. Ist $>$ Noethersch, so gilt dies auch für $\gg$, $\gg_0$ und $\geq_{\mathcal{B}}$.

Bemerkungen zu $\geq_{\mathcal{B}}$

Beispiel

In ($\longmapsto\!\!\!\!\dashv$, $\longrightarrow$) gelte $\longrightarrow\ \subseteq\ >$ und



$$\begin{aligned} B_1 &\equiv x \longleftarrow u \longrightarrow y \\ B_2 &= x \longmapsto\!\!\!\!\dashv\; y \\ B_3 &= x \longmapsto\!\!\!\!\dashv\; z \\ B_4 &= x \longrightarrow z \end{aligned}$$

Es gilt $u > x > z$ und $u > y > z$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} c(B_1) = \{\{u\}, \{u\}\} &\gg_0 c(B_2) = \{\{x, y\}\} \\ &\gg_0 c(B_3) = \{\{x, z\}\} \\ &\gg_0 c(B_4) = \{\{x\}\} \end{aligned}$$

also $B_1 >_{\mathcal{B}} B_2 >_{\mathcal{B}} B_3$.

Bemerkungen zu $\geq_{\mathcal{B}}$ (Forts.)

Lemma 2.8

$\geq_{\mathcal{B}}$ ist eine Beweisordnung.

Beweis:

1) $\geq_{\mathcal{B}}$ ist Noethersch, da $\gg_0$ Noethersch ist.
2) $\geq_{\mathcal{B}}$ ist verträglich mit der Beweisstruktur:

Sei $B > B'$, B_1, B_2 wie in der Definition.

Also $c(B_1 B B_2) = c(B_1) \cup c(B) \cup c(B_2)$

$$\gg_0 c(B_1) \cup c(B') \cup c(B_2) = c(B_1 B' B_2)$$

$$B_1 B B_2 >_{\mathcal{B}} B_1 B' B_2$$

Korrektheit von $\mathcal{B}$: Beweis (1)

Lemma 2.9

$\mathcal{B}$ ist logisch korrekt:

Sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}_>$, $(\vdash\!\!\dashv, \longrightarrow) \underset{\mathcal{B}}{\vdash} (\vdash\!\!\dashv', \longrightarrow')$

a) Ist $\longrightarrow \subseteq >$, so ist auch $\longrightarrow' \subseteq >$.
b) $(\vdash\!\!\dashv \cup \longleftrightarrow)^* = (\vdash\!\!\dashv' \cup \longleftrightarrow')^*$.

Beweis: nachrechnen.

Lemma 2.10

$\mathcal{B}$ verkleinert Beweise:

Sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}_>$, $(\vdash\!\!\dashv, \longrightarrow) \underset{\mathcal{B}}{\vdash} (\vdash\!\!\dashv', \longrightarrow')$

Ist B Beweis zu $u \sim v$ in $(\vdash\!\!\dashv, \longrightarrow)$, so gibt es einen Beweis B' zu $u \sim v$ in $(\vdash\!\!\dashv', \longrightarrow')$ mit $B \geq_{\mathcal{B}} B'$.

Transformiert der Inferenzschritt eine Spitze $u \longleftarrow \circ \longrightarrow v$ (mit Regel (2) „Deduzieren“), so gilt $B >_{\mathcal{B}} B'$.

Beweis: nachrechnen (siehe Beispiel oben).

Fairness

Motivation

Eine Abarbeitung von Anforderungen heißt **fair**, wenn keine Anforderung unendlich lange auf die Abarbeitung warten muss.

Definition 2.16

Sei $(\vdash\!\!\dashv_i, \longrightarrow_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine $\mathcal{B}$-Ableitung.

Das **Grenzsystem** $(\vdash\!\!\dashv^\infty, \longrightarrow^\infty)$ ist

$$\vdash\!\!\dashv^\infty = \bigcup_{i\geq 0} \bigcap_{j\geq i} \vdash\!\!\dashv_j \qquad \longrightarrow^\infty = \bigcup_{i\geq 0} \longrightarrow_i$$

Die Ableitung heißt **fair**, falls

i) $\vdash\!\!\dashv^\infty = \emptyset$

ii) $x\ {}^\infty\!\longleftarrow u \longrightarrow^\infty y \quad \rightsquigarrow \exists k : x \vdash\!\!\dashv_k y$

Erinnerung: Ziel ist

$$x \sim y \qquad \rightsquigarrow \qquad x \downarrow_\infty y$$

Korrektheit von $\mathcal{B}$: Beweis (2)

Lemma 2.11

Sei $(\vdash\!\!\dashv_i, \longrightarrow_i)_{i\in\mathbb{N}}$ faire $\mathcal{B}$-Ableitung und

B Beweis zu $u \sim v$ in $(\vdash\!\!\dashv_i, \longrightarrow_i)$,
B kein V-Beweis.

Dann gibt es

$j \geq i$, Beweis B' zu $u \sim v$ in $(\vdash\!\!\dashv_j, \longrightarrow_j)$
mit $B >_{\mathcal{B}} B'$.

Satz 2.9.

Sei $(\vdash\!\!\dashv_i, \longrightarrow_i)_{i\in\mathbb{N}}$ fair und $\longrightarrow\ = \ \longrightarrow^\infty$

a) Gilt $u \sim v$, so gilt $u \downarrow v$;
es gibt sogar ein $i \in \mathbb{N}$ mit $u \downarrow_i v$.

b) $\longrightarrow$ ist konfluent,
$\longrightarrow$ ist terminierend,
$\sim\ =\ \overset{*}{\longleftrightarrow}$.

3 Termersetzungssysteme

3.1 Motivation

Instantiierung

von $\mathcal{E}, \sim, \longrightarrow$

durch spec $=$ (sig, E), R

- Spezifikation spec $=$ (sig, E)

- Signatur sig $= (S, F, \tau)$ $\qquad V$,
  wobei S=Sorten, F=Operatoren, τ=Stelligkeit, V=Variablen sind.
  Dies definiert $\mathcal{E} =$ Term(F, V)

- Axiome E, Gleichungssysteme über Term(F, V).
  Dies definiert $\sim \; = \; =_E$
  $\uparrow$ was ist das?

- R Regelsystem über Term(F, V)
  Dies definiert $\longrightarrow \; = \; \longrightarrow_R$
  $\uparrow$ Termersetzung

Semantik: E-Gleichheit

Mögliche Ansätze zur Definition von $\sim$:

a) operationale E-Gleichheit
$E \vdash s = t \text{ gdw } s =_E t \text{ gdw}$
es gibt Beweis $s \equiv s_0 \longmapsto\!\dashv_E s_1 \longmapsto\!\dashv_E \cdots \longmapsto\!\dashv_E s_n \equiv t$
„Ersetze Gleiches durch Gleiches"

b) denotationale E-Gleichheit
$E \models s = t \text{ gdw}$
$s = t$ gilt in allen Modellen von spec $=$ (sig, E)
„semantische E-Gleichheit"

c) initiale E-Gleichheit
$I(\text{spec}) \models s = t \text{ gdw } s = t \in ITh(\text{spec}) \text{ gdw}$
$s = t$ gilt im initialen Modell
„Gültigkeit im ausgezeichneten Modell"