2 Reduktionssysteme

2.1 Abstrakte Reduktionssysteme

Ziel

Zusammenstellen von wichtigen

- Definitionen / Begriffen
- Schlussweisen
- allgemeinen Resultaten

Später

Instanziierung des allgemeinen Rahmens.

Übernahme der Schlussweisen/Resultate.

Definitionen

Gegeben: $\varrho \subseteq \mathcal{E} \times \mathcal{E}$

Setze

$$
\begin{array}{lll}
x\varrho^0 y & \text{gdw} & x = y \\
x\varrho^{i+1} y & \text{gdw} & \exists z : x\varrho^i z, z\varrho y \\
x\varrho^+ y & \text{gdw} & \exists i > 0 : x\varrho^i y \\
x\varrho^* y & \text{gdw} & \exists i \geq 0 : x\varrho^i y
\end{array}
$$

Es ist

ϱ^0	die Identität
ϱ^+	der transitive Abschluß
ϱ^*	der reflexiv-transitive Abschluß

Beispiel

$$
\begin{array}{llll}
\mathcal{E} = \mathbb{N} & x\varrho y & \text{gdw} & x = y + 1 \\
\text{Dann:} & x\varrho^i y & \text{gdw} & x = y + i \\
 & x\varrho^+ y & \text{gdw} & x > y \\
 & x\varrho^* y & \text{gdw} & x \geq y
\end{array}
$$

Bezeichnungen

Definition 2.1

$(\mathcal{E}, \longrightarrow)$ ist ein Reduktionssystem.

Setze

- $\xrightarrow{n}$, $\xrightarrow{+}$, $\xrightarrow{*}$ schon erklärt
- $\longleftarrow$: $\quad x \longleftarrow y$ gdw $y \longrightarrow x$
- $\longleftrightarrow$: $\quad x \longleftrightarrow y$ gdw $x \longrightarrow y$ oder $x \longleftarrow y$
- $\overset{n}{\longleftrightarrow}$, $\overset{+}{\longleftrightarrow}$, $\overset{*}{\longleftrightarrow}$
- $\downarrow$: $\quad x \downarrow y$ gdw $\exists z : x \xrightarrow{*} z \xleftarrow{*} y$
  x, y sind **zusammenführbar**

x **reduzierbar** gdw $\exists y : x \longrightarrow y$

y **Normalform** zu x gdw $x \xrightarrow{*} y$, y irreduzibel

$\longrightarrow$ **terminierend** gdw
es gibt keine unendliche Kette
$u_0 \longrightarrow u_1 \longrightarrow u_2 \longrightarrow \cdots$

Beispiel

Sei

$\mathcal{E} = \mathbb{N}$

$\longrightarrow: n \longrightarrow \frac{3}{2}n,\ n > 0$

$\quad n \longrightarrow \frac{3}{4}n,\ n > 0$

Es gilt

$8 \longrightarrow 12 \longrightarrow 18 \longrightarrow 27$

also $8 \xrightarrow{3} 27$ und $8 \downarrow 27$

$8 \longrightarrow 12 \longleftarrow 16$

also $8 \overset{2}{\longleftrightarrow} 16$ und $8 \downarrow 16$

$6 \longleftarrow 4 \longrightarrow 3$

also $6 \overset{*}{\longleftrightarrow} 3$ aber nicht $6 \downarrow 3$

$\longrightarrow$ ist terminierend

denn $\quad n \xrightarrow{k} m$

$n = 2^i \cdot p \qquad p$ ungerade

$\rightsquigarrow k \leq i.$

Beispiele: Reduktionssysteme

1. $\mathcal{E} = \mathbb{N}$ $\qquad \longrightarrow : n \longrightarrow n - 1$
   $\longrightarrow$ ist terminierend
   n reduzierbar $\mathrm{gdw}\ n > 0$

2. $\mathcal{E} = \mathbb{N}$ $\qquad \longrightarrow : n \longrightarrow \frac{3}{2}n, n > 0$
   $\longrightarrow$ ist terminierend
   n reduzierbar $\mathrm{gdw}\ 2|n$

3. $\mathcal{E} = \mathbb{Z}$ $\qquad \longrightarrow : n \longrightarrow n - 1$
   $\longrightarrow$ ist nicht terminierend
   jedes n ist reduzierbar

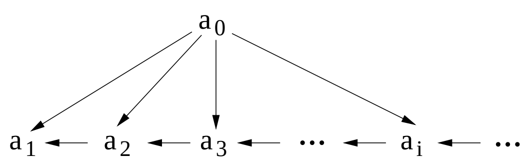
4. $\mathcal{E} = \{a, b\}^*$ $\quad \longrightarrow$: Def. durch Regel $ba \to ab$
   $\longrightarrow$ ist terminierend
   x irreduzibel $\mathrm{gdw}\ x = a^i b^j$
   y NForm zu x gdw
   $$y = a^i b^j \quad i = |x|_a, j = |x|_b$$

   $x \downarrow y\ \mathrm{gdw}\ |x|_a = |y|_a, |x|_b = |y|_b$

Beispiel Termination

$\mathcal{E} = \{a_i \mid i \geq 0\}$

$$\begin{aligned} \longrightarrow : \quad & a_0 \longrightarrow a_i && i > 0 \\ & a_{i+1} \longrightarrow a_i && i > 0 \end{aligned}$$



Es gibt beliebig lange Ketten ab a_0.

Es gibt keine unendliche Kette.

Wie zeigt man Termination?

Definition 2.2

$\geq$ heißt **Partialordnung** falls

i) $x \geq x$
ii) $x \geq y, y \geq x \rightsquigarrow x = y$
iii) $x \geq y, y \geq z \rightsquigarrow x \geq z$

Setze

$>$: $x > y \text{ gdw } x \geq y, x \neq y$

$>$ heißt **strikter Anteil** von $\geq$

Beachte

$\geq$ definiert $>$

$>$ definiert $\geq$

Definition 2.3

$\geq$ (oder $>$) heißt **Noethersche Partialordnung**, falls es keine unendliche Ketten gibt:
$u_0 > u_1 > u_2 > \cdots$

Nachweis der Termination

Lemma 2.1 (Konstruktion Noetherscher Partialordnungen)

Sei $(M, \geq)$ Noethersch geordnet.
$\varphi : \mathcal{E} \to M$ (Terminierungsfunktion),
$>_0$: $u >_0 v \text{ gdw } \varphi(u) > \varphi(v)$.
Dann ist $(\mathcal{E}, \geq_0)$ Noethersch geordnet.

Satz 2.1. (Nachweis der Termination)

Sei $(\mathcal{E}, \longrightarrow)$ Reduktionssystem,
$>$ Noethersche Partialordnung auf $\mathcal{E}$,
$\longrightarrow \subseteq >$ (d. h. $u \longrightarrow v \rightsquigarrow u > v$).
Dann ist $\longrightarrow$ terminierend.

Beispiel

$\mathcal{E} = \mathbb{N} \quad \longrightarrow: n \longrightarrow \frac{7}{2}n \quad n \longrightarrow \frac{25}{6}n, n > 0$

Wähle $M = \mathbb{N}$, $\geq$ natürliche Ordnung,
$\varphi(n) =$ max. k mit $2^k | n$.

Dann: $\longrightarrow \subseteq >_0$.

Noethersche Induktion

- Verallgemeinerung der vollständigen Induktion.
- Viel mächtiger.
- Induktion nach beliebiger **Noetherscher** Partialordnung.

Prinzip

Sei P Prädikat auf Menge M.
$(M, \geq)$ Noethersch geordnet.

Es gelte für jedes feste $x \in M$:

Wenn $P(y)$ für alle $y < x$ gilt,
dann gilt auch $P(x)$.

Dann gilt $P(x)$ für alle $x \in M$.

Spezialfall

$(M, \geq) = (\mathbb{N}, \geq)$

$\Rightarrow$ vollständige Induktion.

Gültigkeit der Noetherschen Induktion

Annahme: Es gibt x_0 mit $\neg P(x_0)$

$\leadsto$ es gibt x_1 mit $\neg P(x_1)$, $x_0 > x_1$
$\leadsto$ es gibt x_2 mit $\neg P(x_2)$, $x_1 > x_2$
$\ldots$
$\leadsto$ es gibt eine unendliche Kette in M
$x_0 > x_1 > x_2 > \cdots$
$\leadsto$ $\lightning$ zu $(M, \geq)$ ist Noethersch geordnet.

Beachte

1) Noethersche Induktion ist nur mit **Noetherscher** Partialordnung erlaubt.
2) Obiger Beweis benutzt das „Auswahlaxiom“:
Wenn jedes x_i (in Abhängigkeit von $x_0, \ldots, x_{i-1}$) existiert, dann existiert die ganze Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$

Beispiele für Noethersche Induktion

Lemma 2.2

Sei $(\mathcal{E}, \longrightarrow)$ terminierendes Reduktionssystem. Jedes $u \in \mathcal{E}$ hat eine Normalform.

Beweis: $> := \stackrel{+}{\longrightarrow}$

$P(u)$: gdw u hat eine NForm.

Zeige: (1) $>$ ist Noethersche Partialordnung.

(2) $\bigwedge\limits_{v<u} P(v) \ \rightsquigarrow P(u)$.

Satz 2.2. (Lemma von König)

Sei T Baum mit

- T hat keinen unendlichen langen Ast,
- jeder Knoten in T hat nur endlich viele Söhne.

Dann ist T endlich.

Beweis: Setze

$u > v$ gdw v ist Nachfolger von u.

$P(u)$ gdw u hat nur endlich viele Nachfolger (in T).

Lokal endliche Reduktionssysteme

Sei $(\mathcal{E}, \longrightarrow)$ Reduktionssystem.

$$\Delta(u) = \{v \mid u \longrightarrow v\} \qquad u \in \mathcal{E}$$
$$\Delta^*(u) = \{v \mid u \stackrel{*}{\longrightarrow} v\} \qquad u \in \mathcal{E}$$

$(\mathcal{E}, \longrightarrow)$ heißt **lokal endlich**, falls $\Delta(u)$ endlich ist für alle $u \in \mathcal{E}$.

$(\mathcal{E}, \longrightarrow)$ heißt **global endlich**, falls $\Delta^*(u)$ endlich ist für alle $u \in \mathcal{E}$.

Satz 2.3.

Sei $\longrightarrow$ lokal endlich und terminierend.
Dann ist $\Delta^*(u)$ endlich für alle $u \in \mathcal{E}$.

$\Rightarrow$ Also: lokal endlich und terminierend impliziert global endlich

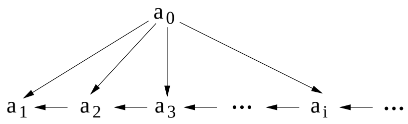
Beweis: Lemma von König.

Beachte

Beide Voraussetzungen im Satz sind wichtig!

Sonst Gegenbeispiele:

a)



terminierend

b)

$a_0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow \cdots$

lokal endlich

2.2 Konfluenz und CR-Eigenschaft

Motivation Wortproblem zu $(\mathcal{E}, \sim)$.

Idee: $\longrightarrow$ so bestimmen, dass mit $\longrightarrow$ das Wortproblem zu $(\mathcal{E}, \sim)$ lösbar ist.

Es gelte (1) bis (4):

(1) $\sim \; = \; \stackrel{*}{\longleftrightarrow}$.

(2) Jedes $u \in \mathcal{E}$ hat maximal eine N.Form.

(3) Jedes $u \in \mathcal{E}$ hat mindestens eine N.Form.

(4) Die Normalform $\hat{u}$ zu u ist berechenbar.

Dann folgt

i) Jedes $u \in \mathcal{E}$ hat genau eine NForm $\hat{u}$.

ii) $u \sim v \text{ gdw } \hat{u} \equiv \hat{v}$.

Konfluenz und CR-Eigenschaft (Forts.)

Beispiel

$\mathcal{E} = \{a, b\}^*$, $\sim$ gegeben durch $E = \{aa = b\}$.

Sei $\longrightarrow$ gegeben durch $R = \{aa \to b\}$.

Dann: $ab \longleftarrow aaa \longrightarrow ba$

aaa hat 2 N.Formen

$ab =_E ba$, aber nicht $ab \downarrow ba$

Hinreichende Bedingungen

zu (2): Konfluenz/CR-Eigenschaft.

zu (3): Termination.

Konfluenz: Definitionen

Sei $(\mathcal{E}, \sim)$ ein Reduktionssystem.

Definition 2.4

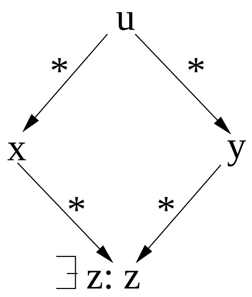
a) $\longrightarrow$ ist **konfluent**
gdw $\xleftarrow{*} \circ \xrightarrow{*} \subseteq \downarrow$
(gdw aus $x \xleftarrow{*} u \xrightarrow{*} y$ folgt $x \downarrow y$)

b) $\longrightarrow$ ist **einseitig lokal konfluent**
gdw $\longleftarrow \circ \xrightarrow{*} \subseteq \downarrow$
(gdw aus $x \longleftarrow u \xrightarrow{*} y$ folgt $x \downarrow y$)

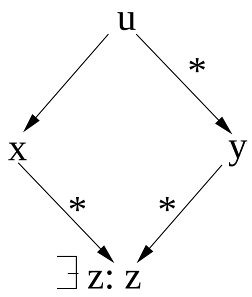
c) $\longrightarrow$ ist **lokal konfluent**
gdw $\longleftarrow \circ \longrightarrow \subseteq \downarrow$
(gdw aus $x \longleftarrow u \longrightarrow y$ folgt $x \downarrow y$)

d) $\longrightarrow$ ist **CR** (hat **Church-Rosser-Eigenschaft**)
gdw $\xleftrightarrow{*} \subseteq \downarrow$
(gdw aus $x \xleftrightarrow{*} y$ folgt $x \downarrow y$)

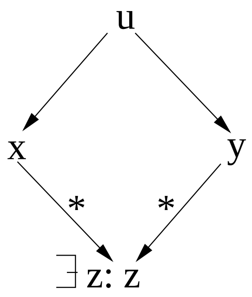
Konfluenz: Im Bild



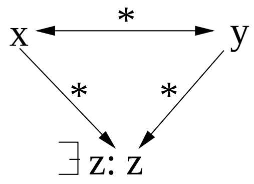
konfluent



einseitig lokal konfluent



lokal konfluent



Church−Rosser−Eigenschaft